

RENDICONTI  
DELLE SEDUTE  
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 4 febbraio 1917.*

A. RÖITI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE  
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

---

Astronomia. — *Sulla determinazione della polodia.* Nota del Corrispondente V. CERULLI.

A pag. 532 e segg. del tomo XXX (1913) del Bulletin astronomique è un'Articolo del sig. H. Roggero, assistente dell'Osservatorio di Pino Torinese, in cui si pretende dimostrare che, per conoscere in grandezza e direzione gli spostamenti del polo sopra la superficie terrestre, e quindi tracciare la cosiddetta « polodia », possono bastare osservazioni sistematiche delle distanze zenitali meridiane di parecchie stelle, o, in altre parole, osservazioni di latitudine, *fatte in un solo osservatorio*.

L'assurdità di questa proposizione salta agli occhi di chiunque consideri come due essendo le incognite da determinare, due almeno debbano pur essere i dati d'osservazione: è quindi impossibile che basti la variazione di latitudine di un'unica specola. Nè è difficile, nella elementare analisi del Roggero, scoprire l'errore radicale che ha condotto alla falsa asserzione. Sta esso nell'aver considerato lo spostamento del polo come un archetto di circolo orario fisso, cioè non partecipante alla rotazione terrestre: in altre parole nell'aver creduto che si trattati di moti dell'asse di rotazione e quindi del polo celeste nella sfera celeste, anzichè di moti del polo terrestre sopra la superficie del globo, ossia della Terra rispetto all'asse di rotazione. Il lettore si accorge di ciò anche alla semplice ispezione delle figure dell'Articolo, dove vede il nuovo parallelo di un dato punto della Terra, inclinato sull'antico, e le distanze polari (non soltanto le zenitali) delle stelle, mutate in seguito dello spostamento di polo sulla Terra, come se si trattasse di spostamento del polo in cielo, ossia dell'asse di rotazione.

Il contenuto dell'Articolo del Roggero poggia dunque su di un malinteso, ed è totalmente da rigettare.

L'errore in parola riappare nel Bulletin del 1914 a pag. 114 in una Nota del prof. Boccardi, Direttore del detto Osservatorio di Pino, che si chiude con queste parole:

“ Le grand nombre de nos observations et leur précision nous mettent à même de pouvoir déterminer la polhodie par nos observations, indépendamment des observations faites dans les six stations internationales ”.

Con qual metodo si determini a Pino la polodia non è detto, ma è manifestamente quello del Roggero, perchè già da questo indicato nel suo Articolo.

Riappare poi l'errore fin una terza volta nel Bulletin dell'ottobre 1816, in una rassegna, senza disamina, che l'astronomo B. B. fa delle pubblicazioni di Pino Torinese. In essa si riportano — senza sospettarne la falsità — le formule del Roggero.

L'essersi l'assurdo potuto insinuare, e sostenere così a lungo, in un periodico dell'importanza del Bulletin, ci ha fatto pensare che fosse doveroso il rilevarlo. Non avremmo, in caso diverso, stimato prezzo dell'opera l'occuparcene (¹).

Per poter determinare la polodia da una sola stazione bisognerebbe conoscere con estrema esattezza oltre la variazione di latitudine, anche lo spostamento del zenit perpendicolare al meridiano, o, che fa lo stesso, l'influenza di detto spostamento sullo stato dell'orologio. Detta  $d\theta$  questa influenza e  $d\varphi$  la variazione della latitudine, si avrebbero le relazioni:

$$\text{Spostamento del polo . . . .} = \sqrt{d\varphi^2 + \cot^2 \varphi d\theta^2}$$

$\theta$  = angolo fra lo spostamento del polo ed il meridiano della

$$\text{stazione . . . . .} = \arctg \left( \cot \varphi \frac{d\theta}{d\varphi} \right)$$

Si potrebbe anche, invece di  $d\theta$ , far entrare in considerazione il cambiamento  $dA$  d'azimut di una mira terrestre, e le relazioni sarebbero:

$$\text{Spostamento del polo} = \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi dA^2}$$

$$\tg \theta = \cos \varphi \frac{dA}{d\varphi}.$$

Ma sì nell'uno che nell'altro modo, la soluzione del problema sarebbe puramente teorica, bastando microscopici errori nelle già di per sè minime quantità  $d\theta$ ,  $d\varphi$ ,  $dA$ , a falsar totalmente la conoscenza dell'angolo  $\theta$ .

Ne concludiamo che la polodia può costruirsi solo in base ai  $d\varphi$  di diverse stazioni: ciò che il buon senso aveva suggerito fin dal primo giorno che si scopersero variazioni nelle latitudini.

(¹) Di altri Articoli della stessa provenienza di Pino, accolti anch'essi nel Bulletin, avremo forse opportunità di occuparci in seguito.

Fisica matematica. — *Sulla teoria dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici. Nota II del Corrisp. O. TEDONE.*

V. — MEZZO CRISTALLINO UNIASSICO INDEFINITO

8. Supponiamo ora che il nostro mezzo cristallino si estenda all'infinito, in tutti i sensi, e che, in esso, non abbiano luogo correnti di convezione, per cui sia dappertutto  $u = v = w = 0$ . Supponiamo, quindi, che, all'istante iniziale  $t = 0$ , sieno dati i valori  $X_0, Y_0, \dots, W_0$  di  $X, Y, \dots, W$ , per ogni sistema di valori delle coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  e cerchiamo di determinare i valori delle stesse quantità per ogni sistema di valori delle coordinate stesse ad ogni altro istante  $t$  successivo all'istante iniziale. Questo problema ci vien subito risolto, per una parte, dalle formole generali (8) e (15), precedentemente costruite, se, in queste, oltre a porre  $u = v = w = 0$ , si suppone che la varietà a tre dimensioni a cui appartengono  $\sigma_3$  e  $\bar{\sigma}_3$  si riduca all'iperpiano  $\tau = 0$ ; per l'altra parte, invece, ci vien risolto dalle formole (21) costruite nel piano  $\xi = x, \eta = y$  del solito spazio a quattro dimensioni e adattate alle equazioni (16), (16'), nella stessa ipotesi  $u = v = w = 0$  e nell'altra che la linea  $s$  a cui appartengono i punti  $P, Q, R$  sia la retta  $\tau = 0$  del piano  $\xi = x, \eta = y$  sopramenzionato.

Chiamando  $S$  lo spazio compreso nella sfera ordinaria di raggio  $Ct$  col centro nel punto  $(x, y, z)$  ed  $\bar{S}$  lo spazio compreso nell'ellissoide

$$\varepsilon_3 [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] + \varepsilon_1 (\zeta - z)^2 = c^2 t^2,$$

concentrico alla sfera precedente, possiamo scrivere, intanto, le due formole seguenti per  $W$  e  $Z$

$$\left. \begin{aligned}
 4\pi W(x, y, z, t) &= 4\pi W_0(x, y, z) - \\
 &\quad - \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{Y_0}{r} dS - \frac{\partial}{\partial y} \int_S \frac{X_0}{r} dS \right] + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_S \frac{W_0}{r} dS - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_S \frac{U_0}{r} dS + \frac{\partial}{\partial y} \int_S \frac{V_0}{r} dS \right], \\
 \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) &= \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z_0(x, y, z) + \\
 &\quad + \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{S}} \frac{V_0}{r} d\bar{S} - \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{S}} \frac{U_0}{r} d\bar{S} \right] + \\
 &\quad + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_{\bar{S}} \frac{Z_0}{r} d\bar{S} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\bar{S}} \frac{X_0}{r} d\bar{S} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{S}} \frac{Y_0}{r} d\bar{S} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Determinate, così,  $W$  e  $Z$ , troviamo subito, per  $X$  e  $V$ ,

$$\left. \begin{aligned}
 2X(z, t) &= X_0(z - Ct) + X_0(z + Ct) + \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} [V_0(z - Ct) - V_0(z + Ct)] + \\
 &\quad + \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] + W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] - Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau, \\
 (23) \quad 2V(z, t) &= \sqrt{\varepsilon_1} [X_0(z - Ct) - X_0(z + Ct)] + V_0(z - Ct) + V_0(z + Ct) + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] - W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau + \\
 &\quad + c \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] + Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau
 \end{aligned} \right\}$$

nelle quali formole non abbiamo messi in vista i parametri  $x$  e  $y$  da cui le nostre quantità pure dipendono. Per  $Y$  ed  $U$  troviamo, invece, analogamente

$$\left. \begin{aligned}
 2Y(z, t) &= Y_0(z - Ct) + Y_0(z + Ct) - \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} [U_0(z - Ct) - U_0(z + Ct) - \\
 &\quad - \frac{c}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] + W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] - Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau, \\
 (23') \quad 2U(z, t) &= -\sqrt{\varepsilon_1} [Y_0(z - Ct) - Y_0(z + Ct)] + U_0(z - Ct) + U_0(z + Ct) + \\
 &\quad + C \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \left\{ W[z + C(t - \tau), \tau] - W[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau - \\
 &\quad - c \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t \left\{ Z[z + C(t - \tau), \tau] + Z[z - C(t - \tau), \tau] \right\} d\tau.
 \end{aligned} \right\}$$

## VI. — CENTRO LUMINOSO IN UN MEZZO UNIASSICO.

9. Mettendoci dal punto di vista della teoria elettromagnetica della luce, diremo che un punto  $A$ , in un mezzo qualunque, è un centro lumi-

noso (più in generale, centro di scuotimento elettromagnetico) se all'interno di una piccolissima regione  $S$ , intorno al punto  $A$ , esistono delle masse elettriche vibranti (restando nel caso più generale, si può lasciare indeterminata la frequenza di queste vibrazioni) le quali restino continuamente all'interno della detta regione di spazio, e intendendo di considerare gli effetti prodotti dal movimento di queste masse elettriche a distanze finite da  $A$  e infinitamente grandi rispetto alle dimensioni di  $S$ .

Otterremo subito le formole atte a rappresentare il campo elettromagnetico dovuto al centro di scuotimento  $A$ , nel nostro caso, se, nelle formole generali, supponiamo che sia  $X_0 = Y_0 = \dots = W_0 = 0$ , mentre  $u, v, w$  sieno diversi da zero soltanto all'interno della varietà cilindrica con le generatrici parallele all'asse  $t$  e di sezione normale  $S$ , per  $t \geq 0$ . Avremo così tre specie di campi elettromagnetici distinti da considerare supponendo che sia diversa da zero una sola delle tre quantità  $u, v, w$  all'interno della varietà cilindrica sopra menzionata. E, poichè le formole relative al caso in cui  $v$  solamente è diverso da zero si deducono da quelle relative al caso in cui è diversa da zero soltanto  $u$ , facendo rotare gli assi coordinati  $x, y, z$ , nel senso positivo, di un angolo retto, intorno all'asse  $z$ , ci restringeremo a trascrivere le formole relative ai due casi in cui è diversa da zero soltanto  $w$ , ovvero  $u$ .

Se chiamiamo  $x_0, y_0, z_0$  le coordinate del centro luminoso  $A$ , nel caso in cui sia  $u = v = 0, w \neq 0$ , ponendo

$$\int_0^t d\tau \int_S \frac{W(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{r} dS = \frac{f(t)}{r}$$

$$\text{con } \bar{r} = \sqrt{\varepsilon_3 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \varepsilon_1 (z - z_0)^2},$$

avremo

$$(24) \quad W = 0 \quad , \quad Z = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{f\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)}{\bar{r}},$$

mentre  $X, Y, U, V$  saranno date sempre dalle (23), (23') quando, in esse, si ponga  $X_0 = Y_0 = U_0 = V_0 = 0$  e, per  $W$  e  $Z$ , le espressioni (24).

Nel caso, invece, in cui sia  $v = w = 0, u \neq 0$ , ponendo

$$\int_0^t d\tau \int_S \frac{u}{r} dS = \frac{F(t)}{r} \quad , \quad \int_0^t d\tau \int_S \frac{u}{\bar{r}} dS = \frac{F(t)}{\bar{r}},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

possiamo scrivere

$$(25) \quad \begin{cases} W(x, y, z, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \frac{F\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}, \\ Z(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{F\left(t - \frac{\bar{r}}{c}\right)}{\bar{r}}, \end{cases}$$

mentre  $X, Y, U, V$  saranno ancora date dalle (23), (23'), sempre nella ipotesi che in esse si faccia  $X_0 = Y_0 = U_0 = V_0 = 0$  e si pongano, per  $W$  e  $Z$ , le espressioni (25).

10. Possiamo aggiungere, allo scopo di dare più chiara ragione del perchè si riesca completamente alla integrazione delle equazioni del campo elettromagnetico, in un mezzo uniassico, che  $W$  e  $Z$ , in questo caso, soddisfano, rispettivamente, alle equazioni

$$(26) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \right) \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \\ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \left[ \frac{1}{\epsilon_3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} \frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Di queste equazioni si costruiscono immediatamente soluzioni con un punto singolare soltanto e, partendo da esse, si possono poi costruire soluzioni analoghe per le equazioni che sono state oggetto del nostro studio.

## VII. — FORMOLE DI KIRCHHOFF E PRINCIPIO DI HUYGENS.

11. In quest'ultima parte di questo nostro studio, supporremo che sia  $u = v = w = 0$  ed, inoltre, che sieno soddisfatte le due relazioni

$$(27) \quad \epsilon_1 \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \epsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Considereremo, quindi, una superficie ordinaria  $\sigma$  racchiudente una regione  $S$  dell'iperpiano  $\tau = 0$  del nostro spazio a quattro dimensioni, ed assumeremo per la varietà a tre dimensioni dello stesso spazio alla quale appartengono  $\sigma_3$  e  $\bar{\sigma}_3$ , quella costituita da  $S$  e dalla parte della varietà cilindrica a tre dimensioni che ha le generatrici parallele all'asse  $\tau$  e per direttrice la superficie  $\sigma$ , sulla quale  $\tau > 0$ . E supporremo, anche, che la coordinata  $t$  sia così grande che le varietà coniche caratteristiche  $\Gamma$  e  $\bar{\Gamma}$  che hanno il vertice comune nel punto  $(x, y, z, t)$ , abbiano tutti i loro punti esterni a  $\sigma$ .

e incontrino, quindi, l'iperpiano  $\tau = 0$  sempre in punti diversi da quelli di S. In questa ipotesi, dalla (8), tenendo conto delle (26), avremo subito

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} W(x, y, z, t) = -\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} + \\ \quad + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 G_3}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) - \\ \quad - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} (U_0 \cos n\xi + V_0 \cos n\eta + W_0 \cos n\zeta) \frac{d\sigma}{r} \end{array} \right.$$

nella quale formula è, ora,

$$(27') \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (V \cos n\zeta - W \cos n\eta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}}, \dots \\ G_1 = -\frac{c}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} \int_0^t \frac{d\tau}{C} (Y \cos n\xi - Z \cos n\eta) d\tau, \dots \end{array} \right.$$

ed  $U_0, V_0, W_0$  indicano i valori di  $U, V, W$  sull'iperpiano  $\tau = 0$ . La formula (27) appartiene al tipo delle formole di Kirchhoff. Da questa si ottiene subito una formula che ha, com'essa stessa, inalterata la corrispondente nel caso dell'isotropia completa, notando che, in virtù delle equazioni del campo,

$$G_1 = -\frac{c}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_S \frac{dS}{r} \int_0^t \frac{d\tau}{C} Y d\tau \right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_S \frac{dS}{r} \int_0^t \frac{d\tau}{C} Z d\tau \right) \right\} + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{dS}{r} \left| U \right|_0^t \frac{r}{C}, \dots$$

o che si scrive

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi W(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (V \cos n\zeta - W \cos n\eta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} - \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (W \cos n\xi - U \cos n\zeta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} - \\ \quad - \frac{c}{C} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (X \cos n\eta - Y \cos n\xi) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}} - \\ \quad - \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (U \cos n\xi + V \cos n\eta + W \cos n\zeta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{C}}. \end{array} \right.$$

Formole analoghe alle precedenti, valgono per Z. Di queste trascriviamo solo quella che corrisponde alla (28).

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon_1}} Z(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (Y \cos n\xi - Z \cos n\eta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{c}} - \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (Z \cos n\xi - X \cos n\zeta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{c}} + \\ \quad + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (U \cos n\eta - V \cos n\xi) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{c}} - \\ \quad - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\sigma} \frac{d\sigma}{r} (\varepsilon_1 X \cos n\xi + \varepsilon_1 Y \cos n\eta + \varepsilon_3 Z \cos n\zeta) \Big|_{\tau=t-\frac{r}{c}}. \end{array} \right.$$

Il principio di Huygens vale, dunque, per le componenti W e Z delle forze magnetiche ed elettriche secondo l'asse d'isotropia ed è rappresentato dalle formole (28) e (29). I valori di queste due quantità, in un punto  $(x, y, z)$ , si possono sempre immaginare determinati dal sistema di valori che le sei quantità X, Y, ..., W assumono su di una superficie fissa, arbitraria, separante il punto  $(x, y, z)$  dai centri di scuotimento elettromagnetico che producono il campo, ed, all'istante  $t$ , il valore di W, nel punto  $(x, y, z)$ , dipende soltanto dalle condizioni elettromagnetiche in cui si trovano i diversi elementi  $d\sigma$  della superficie  $\sigma$ , distanti di  $r$  dal punto  $(x, y, z)$ , agli istanti corrispondenti  $t - \frac{r}{c}$ , mentre il valore di Z dipende dalle condizioni elettromagnetiche in cui si trovano gli stessi elementi di superficie agli istanti  $t - \frac{r}{c}$ .

12. Cerchiamo, ora, che cosa si può dire, per quanto riguarda il principio di Huygens, sulle altre quattro quantità X, Y, U, V. Avvertiamo, intanto, che ci limiteremo a considerare soltanto X, potendosi estendere, facilmente, alle altre tre quantità quello che riusciremo a stabilire per X. Allo scopo indicato, consideriamo il piano  $\xi = x, \eta = y$  del nostro solito spazio a quattro dimensioni e supponiamo, per evitare complicazioni inessenziali, che questo piano incontri la superficie  $\sigma$  in due soli punti A e B i cui corrispondenti valori di  $\zeta$  indicheremo con  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  e sia  $\zeta_1 < \zeta_2$ . Lo stesso piano incontrerà la varietà cilindrica di cui abbiamo fatto uso nel num. prec. e che ha per direttrice la superficie  $\sigma$ , nelle due generatrici  $a$  e  $b$  le quali sono, naturalmente, parallele all'asse  $\tau$ . Supponiamo, poi, che le costruzioni fatte per stabilire le (21), sieno state eseguite nel piano  $\xi = x, \eta = y$  e che la linea  $s$  a cui appartengono i punti P, Q, R sia costituita dal segmento di retta  $\overline{AB}$ , tutto contenuto in S, e dalle due parti delle

rette  $a$  e  $b$ , passanti per gli estremi del segmento  $\overline{AB}$ , sulle quali  $\tau > 0$ . Ricordando che  $u = v = w = 0$ , troviamo subito

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{\epsilon_1} X(z, t) = (X\sqrt{\epsilon_1} + V)_{\zeta=\zeta_1, \tau=t-\frac{z-\zeta_1}{C}} + \\ \quad + (X\sqrt{\epsilon_1} - V)_{\zeta=\zeta_2, \tau=t+\frac{z-\zeta_2}{C}} + \\ \quad + \int_{\zeta_1}^z d\zeta \left( \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \sqrt{\epsilon_1} \right)_{\tau=t-\frac{z-\zeta}{C}} + \\ \quad + \int_z^{\zeta_2} d\zeta \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} \sqrt{\epsilon_1} \right)_{\tau=t+\frac{z-\zeta}{C}}. \end{array} \right.$$

In questa formula compaiono i valori di  $W$  e  $Z$  in tutti i punti del segmento  $\overline{AB}$  interno ad  $S$ , ciascuno di questi valori in un istante corrispondente determinato.  $X(x, y, z, t)$ , com'è determinato dalla (30), si può, quindi, considerare come dipendente dalle condizioni elettromagnetiche degli elementi della superficie  $\sigma$  in tutto un intervallo finito di tempo.

13. Ad evitare malintesi, mi permetto di aggiungere le considerazioni seguenti sulla nomenclatura seguita a riguardo del principio di Huygens, sul significato e l'importanza di questo principio.

A rigore, si può parlare di un principio di Huygens ogni volta che ci troviamo in presenza di una determinata categoria di fenomeni di propagazione in un mezzo continuo. Però, si può, anche, parlare di una dimostrazione di un tale principio solo quando si è riusciti a costruire una teoria razionale dei fenomeni accennati per cui essi vengano a dipendere da certe equazioni che, di solito, sono alle derivate parziali. E la dimostrazione del principio di Huygens consisterebbe in un procedimento analitico con cui si deducono, dalle equazioni alle derivate parziali, le formole che rappresentano questo principio. Nel periodo empirico della scienza, un principio di Huygens può essere soltanto una ipotesi, più o meno giustificata dai fatti osservati e che è chiamato a sostituire, in parte almeno, la teoria dei fenomeni di propagazione a cui si riferisce (equazioni alle derivate parziali e loro formole d'integrazione).

Col passaggio della scienza dal periodo empirico a quello razionale, un principio di Huygens può ancora conservare molto valore a causa delle difficoltà che le equazioni alle derivate parziali possono offrire alla loro integrazione indefinita, o con condizioni ai limiti, mentre il principio stesso, com'è il caso dell'ottica, si presta bene a risolvere i problemi della natura indicata con approssimazione che si mostra sufficiente per molti scopi.

Come conseguenza di quello che è stato detto sopra, invece che ad una certa categoria di fenomeni di propagazione converrà riferirsi alle equazioni

che li rappresentano e di esse dire se ammettono, o non ammettono, un principio di Huygens; e questo, mi pare, sia anche il punto di vista dell'Hadamard.

Per esprimere con la maggiore precisione il nostro pensiero, supporremo che si tratti di fenomeni di propagazione in uno spazio a tre dimensioni, traducibili in equazioni del primo ordine, nelle variabili indipendenti  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Sarà, poi, facile generalizzare quello che andremo a dire agli altri casi. Ritorniamo, perciò, a considerare lo spazio a quattro dimensioni  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  e la varietà  $\sigma_3$ , di questo spazio, formata dalla regione  $S$  dell'iperpiano  $\tau = 0$ , limitata dalla superficie  $\sigma$ , e dalla parte della varietà cilindrica avente per direttrice  $\sigma$  e le generatrici parallele all'asse  $\tau$ , sulla quale sia  $\tau > 0$ . Se in tutti i punti di questa varietà  $\sigma_3$  sono assegnati i valori delle incognite, il problema di esprimere, per mezzo di essi, i valori delle incognite stesse in ogni punto  $(x, y, z, t)$  con  $t > 0$  e, aggiungiamo, con  $t$  sufficientemente grande come innanzi è stato indicato, è un problema, ordinariamente, possibile. Esso non è che un caso particolare del problema di Cauchy. Può, però, accadere che nelle formole che risolvono il nostro problema non compaiano, o si possano eliminare i valori delle incognite nei punti di  $S$ . In questo caso i valori delle incognite nel punto  $(x, y, z, t)$  sono espressi per mezzo dei valori che esse assumono sulla superficie  $\sigma$  in un certo intervallo di tempo, il quale intervallo varierà, in generale, col variare dell'elemento di  $\sigma$  a cui si riferisce. In questo caso si dirà che le nostre equazioni ammettono formole di Kirchhoff ed un principio di Huygens *in senso largo*. E si chiameranno, precisamente, formole di Kirchhoff relative alle nostre equazioni, le formole supposte, che danno i valori delle incognite nel punto  $(x, y, z)$  all'istante  $t$ , per mezzo dei valori che le incognite stesse assumono su  $\sigma$  in determinati intervalli di tempo. (È da notare che i valori delle incognite, su  $\sigma$ , che compaiono nelle formole di Kirchhoff non possono darsi tutti ad arbitrio). Si dirà, poi, che sussiste, per le nostre equazioni, un principio di Huygens *in senso stretto*, o un principio di Huygens, senz'altro, se nelle formole di Kirchhoff, supposte, si possono far comparire soltanto i valori delle incognite su  $\sigma$ , a determinati istanti, dipendenti dalla posizione del punto  $(x, y, z)$ , dall'istante  $t$  e dalla posizione degli elementi di  $\sigma$ .

Aggiungiamo che l'ultimo fatto, dato che accada, può accadere in due modi diversi. Nel primo, ed è questo il caso della formola di Kirchhoff propriamente detta, il contributo dato ai valori delle incognite nel punto  $(x, y, z)$ , all'istante  $t$ , da ogni elemento di  $\sigma$  soddisfa alle equazioni del problema. Nel secondo di questi modi, le formole di Kirchhoff soddisfano alle equazioni nostre solo perchè i valori delle incognite nei punti di  $\sigma$  soddisfano alle equazioni stesse come funzioni di  $t$  e delle coordinate dell'elemento variabile di  $\sigma$ . Questo è appunto il caso delle equazioni di Maxwell.

Balistica. — *Alcune formole di balistica esterna con speciale riguardo al problema della correzione del tiro.* Nota del Corrispondente GUIDO FUBINI.

I problemi fondamentali della balistica esterna sono quelli di costruire la traiettoria di un dato proietto con determinate condizioni iniziali, e quello di correggere il tiro per uno spostamento del bersaglio. E notiamo che questo secondo problema non ha minore importanza del precedente; perchè conosciuti anche soltanto in modo approssimato i dati iniziali corrispondenti al bersaglio da colpire, la risoluzione del secondo problema permette di correggere in modo razionale tali dati con pochi colpi di aggiustamento. Tali problemi sono risolti in modo sufficientemente approssimato per il pratico nel caso di tiri tesi: la nostra guerra in alta montagna dimostrò, a quanto mi si disse, l'insufficienza dei metodi soliti nel caso di traiettorie molto curve e di forti dislivelli tra origine e bersaglio. Per ciò che riguarda il problema della costruzione della traiettoria un metodo molto approssimato è quello di scomporla in archi [quello p. es. dove la velocità  $v$  non supera 240 m. s., in cui la resistenza dell'aria è proporzionale a  $v^2$ ; quello, ove  $v > 340$ , in cui la resistenza è quasi una funzione lineare di  $v$ ; e, per l'intervallo  $240 < v < 340$ , integrando l'equazione dell'odografa, p. es. considerandola come un'equazione alle differenze finite] (1). Io qui mi occuperò principalmente del problema della correzione del tiro. Nel § 1 darò un metodo, che p. es. potrà servire al pratico per studiare come variano i coefficienti balistici ridotti del Siacci lungo una traiettoria; e troverò la formola di correzione, che sola si può dedurre dalle formole del Siacci, quando si ammetta per il  $\beta$  principale l'ipotesi del Parodi; nel § 2 troverò una formola di correzione del tiro, valida in tutti i casi senza bisogno di ipotesi sussidiarie; il metodo della falsa origine, che vi uso, è suscettibile delle più svariate applicazioni, che io accenno al § 3. Nel § 4 deduco per nuova via tale formola, che si traduce in un'equazione alle derivate parziali (che ritengo nuova) per le gittate orizzontali e verticali; e ne deduco nuove e più approssimate formole di correzione.

§ 1. *Le formole del Siacci e una prima formola di correzione del tiro.* — Indicando al solito con  $V$  la velocità iniziale, con  $\varphi$  l'angolo di

(1) A tale problema dedicherò un'altra Nota, in cui verranno svolti nuovi metodi di calcolo approssimato.

proiezione, con  $u$  la pseudovelocità, con  $\theta$  l'inclinazione della traiettoria, con  $C'$  i vari coefficienti balistici ridotti, le equazioni del Siacci sono:

$$(1) \quad x = C_x' [D(u) - D(V)];$$

$$(2) \quad \frac{y}{x} - \tan \varphi = - \frac{C_x'}{2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \right]$$

$$(3) \quad \tan \theta - \tan \varphi = - \frac{C_\theta'}{2 \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)].$$

I vari  $C'$  sono in prima approssimazione riguardati come costanti ed uguali tra di loro; negli studii del Gener. Parodi sulla linea di ugual angolo di partenza, essi vengono considerati come costanti lungo un arco di traiettoria, ma variabile da traiettoria a traiettoria; altri perfino li considera costanti lungo una stessa verticale! Nella dimostrazione della formula di correzione del Parodi si trascurano delle quantità non ben definite, si compensano errori non ben noti in modo, che non pare soddisfacente ad un teorico. D'altra parte si applicano poi i risultati ottenuti anche al caso di forti dislivelli tra arma e bersaglio, mentre in generale le tavole di tiro sono calcolate per bersagli posti alla stessa altezza dell'arma. Procedimenti tutti, che mi sembra necessario sostituire con altri logicamente più accettabili.

Non pare p. es. ammissibile senz'altro che nel caso di forti dislivelli si possano considerare i coefficienti balistici ridotti come costanti lungo una stessa traiettoria. Io cercherò di rendere questo fatto evidente, studiando p. es.  $C_\theta'$ . L'equazione dell'odografo

$$g d(v \cos \theta) = \frac{\delta_y i}{C} v F(v) d\theta.$$

$\left[ C = \text{coefficiente balistico}; \delta_y = \text{densità dell'aria all'altezza } y; i = \text{coefficiente di forma}; F(v) = \text{funzione resistente}; v = \text{velocità del proietto}; u = \frac{v \cos \theta}{\cos \varphi} \right] \text{ si può scrivere}$

$$g du = \frac{\delta_y i}{C \cos \varphi} \left[ \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{v F(v)}{u F(u)} \right] u F(u) d\theta = \frac{\delta_y i}{C} \left[ \frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)} \right] \cos^2 \varphi \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} u F(u)$$

$$K(u) = \frac{1}{u^2} F(u);$$

cioè, posto  $\xi_2(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$ ,

$$(4) \quad \xi_2(\theta) - \xi_2(\varphi) = - \frac{C}{2i \delta_0 \gamma \cos^2 \varphi} [J(u) - J(V)]$$

ove con  $\gamma$  indico un valore intermedio di  $\frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)}$ , con  $J(u)$  la solita funzione di Siacci —  $2g \int_u^v \frac{du}{F(u)}$ .

Se noi, seguendo il Siacci, indicassimo con  $\beta$  un valore intermedio di  $\frac{\delta_y}{\delta_0} \frac{K(v)}{K(u)} \frac{1}{\cos \theta}$ , otterremmo la (3) al posto di (4), quando si ponga:

$$C_\theta' = \frac{C}{\delta_0 i \beta}. \text{ Similmente scriverebmo } C_\theta'' = \frac{C}{\delta_0 i \gamma} \text{ (1).}$$

Analiticamente ciò corrisponde soltanto ad un cambiamento di funzione incognita; cioè all'incognita  $\theta$  si è sostituita l'incognita  $\gamma$ . Se io considero la (4) come definente la  $\gamma$ , si vede che l'equazione dell'odografa diventa:

$$(5) \quad \frac{d \left[ \frac{1}{\gamma} \{ J(u) - J(v) \} \right]}{du} = -2 \frac{\delta_0}{\delta_y} \frac{g}{u^3 K(v)}$$

che dà  $\gamma = \text{cost}$ , se si suppone  $\delta_0 = \delta_y$ ,  $K(u) = K(v)$ . È il coefficiente  $\beta$  del Siacci soddisfa a un'equazione dello stesso tipo, di forma lievemente più complicata. La (5) dice dunque come varia  $\gamma$ , ossia come varia  $C''$ ; in modo simile si vedrebbe come variano  $C_x'$ ,  $C_t'$ ,  $C_\theta'$ . Ora nei punti ove  $\frac{\delta_y}{\delta_0}$  è differente sensibilmente da 1 (punti molto elevati), o dove  $v$  dista sensibilmente da  $u$  non si vede come, neanche in un piccolo intorno, tali coefficienti possano considerarsi come costanti, anche se, come suppone il Parodi, ci limitiamo a muoverci lungo una stessa traiettoria. E questi casi, ritenuti come eccezionali, diventano la regola nei tiri a grandi altitudini con grandi angoli di proiezione.

La (5) al pratico potrà dare un'indicazione sommaria del come varii un coefficiente balistico lungo un piccolo arco di traiettoria; il teorico osservi che, integrando le (4), (5) con approssimazioni successive (ciò che è ben noto essere lecito) si potrà calcolare la  $\theta$  con qualsiasi approssimazione. Il valore di  $\theta$  dedotto da (4) con  $\gamma = 1$  (oppure da (2) con  $C = \frac{C}{i \delta \beta}$ ,  $\beta = \frac{1}{\cos \varphi}$ ) rappresenta la prima approssimazione; la (5) darebbe, integrando, un nuovo valore di  $\gamma$ , che, sostituito in (4), permetterebbe di dedurne  $\theta$  con approssimazione maggiore. E così via.

(1) Un valore approssimato di  $\beta$  è  $\frac{1}{\cos \varphi}$ ; un valore approssimato di  $\gamma$  è 1 (anche se  $\varphi$  è molto grande); almeno per velocità non superiore a 300 ms. l'uso di  $C''$  pare più conveniente dell'uso di  $C'$ ; in ogni modo non è difficile passare dall'uno all'altro. L'uso del  $C''$ , anziché del  $C'$  soltanto perché esso soddisfa a un'equazione differenziale più semplice ed ha un valore iniziale indipendente da  $\varphi$ .

*Il metodo di Siacci si può dunque considerare soltanto come la sostituzione del solo primo termine alla serie, che viene data dal classico metodo delle approssimazioni successive.* E appare assai dubioso pertanto che questo sia lecito per tiri molto curvi <sup>(1)</sup>. Probabilmente si potrebbero migliorare tali formole, studiando la (5) e le equazioni analoghe per i vari  $C'$ ; sostituendo poi nelle (1), (2), (3) al posto dei  $C'$  delle convenienti funzioni di  $u$ . Ma io dubito che valga la pena di continuare per questa via; altri e ben più rapidi metodi possono servire (Vallier, Cranz, ecc.) a definire analiticamente le traiettorie! <sup>(2)</sup>.

Il calcolo migliore per dare, senza inutili e imprecise ipotesi, una formula di correzione del tiro conforme ai metodi classici della balistica di Siacci è il seguente. Consideriamo le (1) e (2), in cui si supponga dato a  $C'$  uno stesso valore (ipotesi approssimata usuale) costante (all'incirca) lungo un piccolo arco di traiettoria, e precisamente uguale a  $\frac{F}{\cos^n \varphi}$  lungo la traiettoria con l'angolo di proiezione  $\varphi$ .

Questa ipotesi (che aggiungiamo alle altre del Siacci) è la più spontanea generalizzazione delle ipotesi usuali; e, per quanto io la ritenga poco ammissibile, voglio far vedere che da essa sola, senza altre ammissioni, si può dedurre una formula di correzione del tiro.

Sarà  $n = 0$ , se, come fanno taluni balistici, si suppone potersi ammettere  $C' = \text{cost}$  in un intorno del punto considerato;  $n = \frac{1}{2}$  se, col Parodi, si suppone  $C'$  proporzionale a  $\sqrt{\sec \varphi}$ ;  $n = 1$ , se si ammette  $C'$  proporzionale a  $\sec \varphi$  <sup>(3)</sup>; ecc. ecc. La (1) dà

$$D(u) - D(V) = \frac{1}{F} x \cos^n \varphi,$$

donde

$$(6) \quad dD = \frac{1}{F} (\cos^n \varphi dx - n x \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi d\varphi).$$

(<sup>1</sup>) Il pratico usa le formole Siacci anche nel caso di  $\varphi$  prossimo a  $45^\circ$ ; e assicura che le formole vanno bene, ma si noti che vi compaiono dei coefficienti  $\beta$ , che si determinano appunto in modo da metter d'accordo formole e dati sperimentali. Naturalmente così si aggiusta tutto, ma soltanto per quel determinato dislivello tra origine e bersaglio, che si è avuto nelle esperienze (nullo nei calcoli del Siacci).

(<sup>2</sup>) Alcuni cercano ora, per tiri contro velivoli ecc., di dare delle tavole a doppia entrata, che terrebbero luogo della tavola balistica generale del Siacci; ma, se si vogliono usare tavole cosiddette, sarebbe assai più opportuno costruirle per gli integrali usati da Cranz ecc., abbandonando per tiri non tesi, ogni generalizzazione delle (1), (2), (3). In una prossima Nota dardò per dunque un nuovo metodo, che ricorre a tavole a semplice entrata, cioè a funzioni di una sola variabile; le quali coincidono quasi tutte con quelle del Siacci.

(<sup>3</sup>) Ciò avviene nell'intorno dell'origine; Parodi suppone  $n = \frac{1}{2}$  nel punto di caduta: ciò che forse è lecito in una prima approssimazione.

Poichè  $dA(u) = J(u) dD(u)$ , la (2) dà, differenziando, e riducendo con le (1), (6):

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy}{x} - \frac{y}{x} \frac{dx}{x} \right) \cos^{n+2} \varphi - d[\sin \varphi \cos^{n+1} \varphi] + \frac{y}{x} d(\cos^{n+2} \varphi) = \\ = -\frac{\Gamma}{2} \left\{ \frac{J(u)}{D(u) - D(V)} - \frac{A(u) - A(V)}{[D(u) - D(V)]^2} \right\} dD(u) \\ = -\frac{\Gamma}{2} \left\{ J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right\} \frac{1}{x \cos^n \varphi} \frac{\Gamma}{\Gamma} (\cos^n \varphi dx - nx \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi d\varphi). \end{aligned}$$

Il valore  $C' = \frac{\Gamma}{\cos^n \varphi}$ , per cui valgono le (1), (2), si dirà, secondo la terminologia del Siacci, il  $C'$  principale. Indicheremo con  $\theta'$  il valore di  $\theta$ , che si deduce da (3), sostituendo il  $C'$  principale al  $C_3'$ . Dalle (2), (3) si deduce:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \theta' - \frac{y}{x} = -\frac{\Gamma}{2 \cos^{n+2} \varphi} \left[ J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} \right].$$

cosicchè l'ugualanza precedente diventa:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy}{x} - \frac{y}{x} \frac{dx}{x} \right) \cos^{n+2} \varphi - d[\sin \varphi \cos^{n+1} \varphi] + \frac{y}{x} d(\cos^{n+2} \varphi) = \\ = \cos^2 \varphi \left( \operatorname{tg} \theta' - \frac{y}{x} \right) \frac{1}{x} (\cos^n \varphi dx - nx \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi d\varphi) \end{aligned}$$

ossia

$$(dy - \operatorname{tg} \theta' dx) \cos^{n+2} \varphi = x^n [\sin \varphi \cos^{n+1} \varphi] + n y \operatorname{tg} \theta' \cos^{n+1} \varphi \sin \varphi d\varphi - y d(\cos^{n+2} \varphi)$$

onde

$$(8) \quad d\varphi = \frac{dy - \operatorname{tg} \theta' dx}{x \{ 1 - (n+1) \operatorname{tg}^2 \varphi \} + (n+2) y \operatorname{tg} \varphi + n(y - x \operatorname{tg} \theta') \operatorname{tg} \varphi}$$

ossia

$$(8)^{\text{bis}} \quad d(\operatorname{tg} \varphi) = \frac{dy - \operatorname{tg} \theta' dx}{x(\cos 2\varphi - n \operatorname{sen}^2 \varphi) + (\frac{1}{2}n+1)y \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{2}n(y - x \operatorname{tg} \theta') \operatorname{sen} 2\varphi}$$

che diventa specialmente semplice se  $n = 0$  (caso del movimento nel vuoto). Da queste si passa alla correzione dell'angolo  $\alpha$  di elevazione, notando che  $\varphi = \alpha + \varepsilon + \varrho$ , dove  $\varepsilon = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} =$  angolo di sito,  $\varrho =$  rilevamento = costante. Se ne deduce

$$(8)^{\text{ter}} \quad d\alpha = d\varphi - d\varepsilon = d\varphi - \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Le (8), (8)<sup>bis</sup>, (8)<sup>ter</sup> mi sembrano le uniche formole per la correzione del tiro, che si possano nelle nostre ipotesi logicamente dedurre dalle classiche formole del Siacci. Esse appaiono però profondamente *differenti* dalle formole del Parodi (che suppone  $n = \frac{1}{2}$ ), che pure parte da ipotesi analoghe!

D'altra parte si noti che nelle (8) ogni traccia del coefficiente balistico ridotto del proietto è sparita; la resistenza dell'aria vi compare soltanto per mezzo di un coefficiente  $n$ , che si sceglie sempre lo stesso, sia per velocità piccole che grandi, a cui corrispondono resistenze di tipo tanto differente!

Quando all'angolo  $\theta'$  che vi compare, si noti che, poichè  $d\varphi = 0$  quando il bersaglio si sposta sulla traiettoria del proietto (come è ben evidente), dev'essere in tal caso  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta'$  almeno in via approssimata. L'angolo  $\theta'$  dato dalla (3), sostituendo il C' principale a  $C_0'$ , deve essere dunque prossimo all'inclinazione  $\theta$  della traiettoria. Cioè le 3 formole del Siacci dovrebbero, anche nel caso di tiri molto curvi, rappresentare bene le particolarità del percorso balistico con uno stesso valore di  $\beta$ , o di C'! (1).

Tutto questo permette a un teorico di elevare gravi dubbi sull'esattezza di formole del tipo precedente, e consiglia di affrontare *ex novo* e per altra via il problema della correzione del tiro. Se si volesse percorrere la via precedente con ogni rigore, bisognerebbe trovare le equazioni differenziali analoghe alla (5), a cui soddisfano i vari C': anzi si dovrebbe studiare l'equazione differenziale relativa al C' principale: cosa complicata e poco pratica!

**S 2. Formola per la correzione del tiro.** — Di formole a questo scopo se ne possono dare parecchie, secondo i metodi con cui sono costruite le tavole di tiro. La correzione del tiro si effettua generalmente, facendo variare l'angolo di proiezione; per mettermi nelle condizioni più sfavorevoli, supponiamo di avere una tavola di tiro ad angolo fisso, e carica variabile, tavole che so essere già state proposte da qualche nostro ufficiale, e che sono anche realizzate in qualche modo dalle nostre usuali tavole di tiro, in cui sono dati gli elementi corrispondenti a più cariche differenti.

Siano dunque calcolate le traiettorie corrispondenti a un angolo di proiezione  $\varphi$ , e alle varie velocità iniziali V. Voglio vedere l'effetto prodotto, quando l'angolo di proiezione  $\varphi$  diventa  $\varphi + d\varphi$ . Notiamo che sparare dall'origine O con velocità V ed angolo  $\varphi + d\varphi$  equivale a sparare da quel

(1) Sé questo non avvenisse, le (8) e seg., anzichè servire a correggere il tiro per un dato spostamento del bersaglio, correggerebbero soltanto l'errore commesso dall'autore nelle varie ipotesi fatte circa il coefficiente balistico.

Se l'ipotesi del Parodi è lecita *in pratica*, varrà forse meglio applicare le (8)<sup>bis</sup>, (8)<sup>ter</sup> per il calcolo del coefficiente  $C_s$  del Parodi per i punti prossimi al punto di caduta. Io credo poco esatta la sua applicazione nel caso di forti dislivelli.

punto  $O'$  della traiettoria (dove l'inclinazione ha il valore  $\varphi$ ) con la velocità acquistata dal proietto nel passare dal punto  $O$  al punto  $O'$ . Questa velocità sarà  $V - dv$ , ove  $dv$  è un infinitesimo, che ha lo stesso segno di  $d\varphi$ . [Notisi che, se  $d\varphi < 0$ , il punto  $O'$ , piuttosto che sulla traiettoria, è posto sul prolungamento di questa al di qua dell'origine  $O$ ]. Dunque, per calcolare la traiettoria  $(V, \varphi + d\varphi)$  corrispondente alla velocità iniziale  $V$  e all'angolo di proiezione  $\varphi + d\varphi$ , basterà calcolare la traiettoria  $(V - dv, \varphi)$ , aggiungendo poi alle coordinate di tutti i suoi punti le coordinate di  $O'$  rispetto ad  $O$ .

Se il bersaglio raggiunto con la traiettoria  $(V, \varphi)$  era il punto  $x_0, y_0$ , si tratti di determinare  $d\varphi$  in guisa che la traiettoria  $(V, \varphi + d\varphi)$  raggiunga il bersaglio  $x_0 + dx, y_0 + dy$ . Dette  $\xi, \eta$  le coordinate di  $O'$ , ciò dunque equivale a cercare che la traiettoria  $(V - dv, \varphi)$  raggiunga il bersaglio  $x_0 + dx - \xi, y_0 + dy - \eta$ <sup>(1)</sup>. La traiettoria  $(V, \varphi)$  abbia per tangente nel punto  $(x_0, y_0)$  la retta  $y - y_0 = (x - x_0) \operatorname{tg} \theta$ ; in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$  alla traiettoria potremo sostituire questa retta; sia

$$(y - y_0) = \operatorname{tg} \theta (x - x_0) - \{a(x - x_0) + b\} dV$$

l'equazione corrispondente per la traiettoria  $(V - dV, \varphi)$ . Posto  $y = y_0$ , si deduce, a meno d'infinitesimi d'ordine superiore,  $x - x_0 = -dX = \frac{b}{\operatorname{tg} \theta} dV$ ; cioè l'incremento  $-dX$  di gittata sul piano  $y = y_0$ , corrispondente all'incremento  $-dV$  di velocità iniziale vale  $\frac{b}{\operatorname{tg} \theta} dV$ ; quindi, se  $dX$  è l'incremento di gittata corrispondente all'incremento  $dV$  di velocità iniziale, sarà  $b = -\operatorname{tg} \theta \frac{dX}{dV}$  (dove, si noti,  $-\operatorname{tg} \theta$  sul ramo descendente della traiettoria è positivo). Per es., se il bersaglio è sulla stessa orizzontale del pezzo, è  $-\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \omega$ , dove  $\omega$  è l'angolo di caduta. I valori di  $\operatorname{tg} \theta$ , di  $\frac{dX}{dV}$  si ricaveranno dalla tavola di tiro; il coefficiente  $b$  si può supporre pertanto noto a chi possegga tale tavola. Dovremo cercare  $d\varphi$  in guisa che  $x_0 + dx - \xi, y_0 + dy - \eta$  giaccia sulla retta ultimamente citata, che cioè sia

$$dy - \eta = \operatorname{tg} \theta (dx - \xi) - b dV$$

(formola ottenuta trascurando infinitesimi d'ordine superiore).

(1) Veramente si dovrebbe tener conto della differente densità dell'aria nei punti  $O, O'$ ; ma, se ci limitiamo a piccole correzioni, ci troviamo di fronte ad una quantità certamente trascurabile.

Ora, per le stesse equazioni differenziali del movimento di un proietto, è:

$$g \cos \varphi \, dv = v \left\{ g \sin \varphi + \frac{\delta i}{C} F(v) \right\} d\varphi \quad C = \text{coefficiente balistico}$$

$$g \xi = + v^2 d\varphi \quad ; \quad g\eta = v^2 \operatorname{tg} \varphi d\varphi.$$

La nostra equazione diventa:

$$dy = \frac{1}{g} v^2 \operatorname{tg} \varphi d\varphi + \operatorname{tg} \theta \left[ dx - \frac{v^2}{g} d\varphi \right] - b \frac{v \left[ g \sin \varphi + \frac{\delta i}{C} F(v) \right]}{g \cos \varphi} d\varphi$$

onde

$$(9) \quad d\varphi = g \frac{dy - \operatorname{tg} \theta \, dx}{V^2 (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta) - b V \left( g \operatorname{tang} \varphi + \frac{\delta i}{C} F(V) \frac{1}{\cos \varphi} \right)}.$$

Con la (8)<sup>ter</sup> si passa dalla correzione  $d\varphi$  alla correzione  $d\alpha$  per la elevazione. La (9) è stata ottenuta *trascurando gli infinitesimi del secondo ordine* senza altra ipotesi sussidiaria.

Come controllo, osserviamo che nel vuoto, per bersagli posti all'orizzontale uscente dall'arma, si ha: gittata  $= X = \frac{V^2}{g} \sin 2\varphi$ ;  $\omega = \varphi$ . Cosicchè  $b = 2 \frac{V}{g} \sin 2\varphi \operatorname{tg} \varphi$ . È poi  $F(V) = 0$ ; cosicchè la (9) diventa:

$$d\varphi = \frac{dy - \operatorname{tang} \theta \, dx}{X \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}}$$

in completo accordo con la (8)<sup>bis</sup> ove si ponga  $n = 0$ .

La (9) appare dunque accettabile tanto più volentieri, che essa vale anche nel vuoto [cfr. il § 4 per nuove formole di correzione e nuove interpretazioni della (9)].

Formole più approssimate potremmo ottenere con lo stesso procedimento, sostituendo parabole alle linee rette con cui abbiamo rappresentato l'arco iniziale e l'arco finale della traiettoria. — Soltanto l'esperienza può dire se sia conveniente, o no, raggiungere questa migliore approssimazione teorica. Formole analoghe si hanno per la correzione del tiro con variazione di carica.

In ogni modo io propongo per la correzione dei tiri curvi o con forti dislivelli di abbandonare i metodi usuali, ma di usare o la (9), o quella formola analoga più approssimata, che, come dicemmo, si può ottenere con analogo procedimento.

§ 3. *Altre applicazioni del metodo precedente.* — Il metodo di una falsa origine  $O'$  può ricevere anche altre applicazioni. Esso si basa sul principio che per trovare una traiettoria  $(y + \Delta\varphi, V)$  uscente da  $O$  basta aggiungere le coordinate di una falsa origine  $O'$  alle coordinate dei punti di una traiettoria  $(\varphi, V - \Delta V)$ . Il punto  $O'$  è il punto della traiettoria iniziale, dove l'inclinazione ha il valore  $\varphi$ ; e  $V - \Delta V$  è la velocità del proietto nel punto  $O'$ . Noi potremmo dedurne altre formole di correzione del tiro corrispondenti ad altri tipi di tavole di tiro. Ma esso si presta anche a calcoli di altro genere, che non siano le piccole correzioni. Noi possiamo p. es. con esso da una tavola di tiro ad angolo fisso, dedurre una tavola a carica fissa, cioè a velocità iniziale  $V$  costante; e viceversa; noi possiamo da una tavola di tiro che ci dia i risultati sperimentali quando il bersaglio è all'orizzonte del pezzo passare a una tavola di tiro relativamente a bersagli  $B'$  posti ad altitudine maggiore, scegliendo per ogni traiettoria come falsa origine quel punto  $O'$  che è alla stessa altezza di  $B'$ . E così via. Naturalmente in queste correzioni non piccolissime si dovrà tener conto della differente densità dell'aria all'origine vera ed alla falsa origine. I calcoli numerici, che si riducono a calcolare l'arco  $OO'$  di traiettoria (l'ho verificato io stesso su esempi particolari) riescono abbastanza facili; essi sono poi di una grandissima semplicità per non troppo grandi differenze di velocità nella vera e nella falsa origine: p. es. quando queste due velocità sono entrambe maggiori di 400 ms., oppure comprese p. es. entrambe tra 240 e 285 ms., e così via: in una parola quando le due velocità sono comprese in un intervallo, in cui la resistenza dell'aria si possa esprimere con una stessa funzione analitica della velocità (lineare, oppure proporzionale ad una potenza della velocità). Ho dato un esempio al § 2; soltanto la pratica può suggerire quali altri problemi si debbano affrontare per questa via, cioè per quali calibri e per quali dislivelli sia meglio sviluppare i calcoli numerici. Si potrebbe costruire p. es. una serie di tavole corrispondenti ai dislivelli di 0, 500, 1000, 1500, 2000 m. tra cannone e bersaglio.

§ 4. *Nuovo enunciato della formola data al § 2 in un caso particolare.* — Se noi poniamo in tale formola  $dy = 0$ , essa ci dà l'incremento  $d\varphi$  dell'angolo di proiezione corrispondente all'incremento  $dx$  (o, come diremo,  $dX$ ) di gittata sul piano  $y = \text{cost}$  corrispondente a una stessa velocità iniziale  $V$ ; tale formola permette cioè di calcolare  $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ .

Se ricordiamo che  $b = -\operatorname{tg} \theta \frac{\partial X}{\partial V}$ , troviamo che dalla nostra formola si deduce (entro i limiti di approssimazione <sup>(1)</sup> da noi imposti al calcolo):

<sup>(1)</sup> che in fondo si riducono a trascurare le variazioni di  $\delta$ .

La gittata  $X$  su un qualunque piano orizzontale  $y = \text{cost}$ , pensata come funzione dei dati iniziali  $V, \varphi$ , soddisfa all'equazione:

$$(10) \quad V^2 \left( 1 - \frac{\tg \varphi}{\tg \theta} \right) = g \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial V} V \left[ g \tang \varphi + \frac{\delta i}{C} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right].$$

E una formola affatto analoga si può dedurre per l'altitudine  $Y$  raggiunta su un piano verticale  $x = x_0$ , prefissato ad arbitrio.

Ora noi possiamo dimostrare, o. meglio, verificare direttamente quest'ultima formola, che lega le variazioni di gittata su un piano qualsiasi orizzontale corrispondente a variazioni dei dati iniziali  $\varphi, V$ . Infatti dalle

$$y = \frac{-1}{g} \int_{\varphi_0}^{\theta_1} v^2 \tg \theta \, d\theta \quad X = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\theta_1} v^2 \, d\theta$$

(dove con  $\theta_1$  si è indicato il valore di  $\theta$  nel punto di arrivo) si deduce che  $X$  ed  $y$  possono pensarsi funzioni di  $V, \varphi, \theta_1$  (perchè  $v$  dell'equazione della odografa si deduce come funzione di  $V, \varphi, \theta$ ). Ora

$$-g \frac{\partial y}{\partial \theta_1} = v^2 \tg \theta_1, \quad -g \frac{\partial y}{\partial V} = \int_{\varphi_0}^{\theta_1} \frac{\partial (v^2)}{\partial V} \tg \theta \, d\theta,$$

$$-g \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -V^2 \tg \varphi + \int_{\varphi_0}^{\theta_1} \frac{\partial (v^2)}{\partial \varphi} \tg \theta \, d\theta.$$

Poichè la  $\bar{y}$  si riguarda come costante, dalla  $y = \text{cost}$  si potrà dedurre  $\theta_1$  come funzione di  $V, \varphi$ ; e si avrà:

$$\begin{aligned} d\theta_1 = & -\frac{1}{v^2 \tg \theta_1} \left\{ \left[ \int_{\varphi_0}^{\theta_1} \frac{\partial (v^2)}{\partial V} \tg \theta \, d\theta \right] dV + \right. \\ & \left. + \left[ -V^2 \tg \varphi + \int_{\varphi_0}^{\theta_1} \frac{\partial (v^2)}{\partial \varphi} \tg \theta \, d\theta \right] d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Ora  $X$  è funzione di  $V, \varphi, \theta_1$ , essendo  $\theta_1$  funzione di  $V$  e di  $\varphi$ . Pertanto si trova:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial V} &= \frac{-1}{g} \int_{\varphi_0}^{\theta_1} \frac{\partial (v^2)}{\partial V} \left( 1 - \frac{\tg \theta}{\tg \theta_1} \right) d\theta \\ g \frac{\partial X}{\partial \varphi} &= V^2 \left( 1 - \frac{\tg \varphi}{\tg \theta_1} \right) - \int_{\varphi_0}^{\theta_1} \frac{\partial (v^2)}{\partial \varphi} \left( 1 - \frac{\tg \theta}{\tg \theta_1} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Il secondo membro di (10) diventa pertanto:

$$\begin{aligned} V^2 \left( 1 - \frac{\tg \varphi}{\tg \theta} \right) - 2 \int_{\varphi_0}^{\theta_1} v \left( 1 - \frac{\tg \theta}{\tg \theta_1} \right) \times \\ \times \left\{ \frac{\partial v}{\partial V} V \left[ \tang \varphi + \frac{\delta i}{Cg} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right] + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} d\theta. \end{aligned}$$

La (10) risulta verificata se  $v$ , funzione di  $\theta, \varphi, V$ , soddisfa alla relazione ottenuta uguagliando a zero l'espressione tra {}, cioè alla

$$(11) \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} g \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial V} V \left[ g \sin \varphi + \frac{\delta i}{C} F(V) \right] = 0$$

(per ogni valore di  $\theta$ ).

Ora ciò è ben evidente, perchè i valori di  $V$  e di  $\varphi$ , che fanno corrispondere a uno stesso valore di  $\theta$  lo stesso valore di  $v$ , soddisfano alla

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} g d(V \cos \varphi) = \frac{\delta i}{C} V F(V) d\varphi, \\ \text{ossia} \\ g \cos \varphi dV = V \left[ g \sin \varphi + \frac{\delta i}{C} F(V) \right] d\varphi. \end{array} \right.$$

Ora la (11) dice appunto soltanto questo che il valore di  $v$ , corrispondente ad un dato valore di  $\theta$ , non varia (ha differenziale nullo), quando  $V, \varphi$  variano soddisfacendo alla (12).

La (10) si può chiamare l'equazione delle gittate su un piano orizzontale qualsiasi; l'equazione analoga per le altitudini  $Y$  su un piano verticale

$$(10)^{\text{bis}} \quad V^2 (\tan \varphi - \tan \theta) = g \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial V} V \left[ g \tan \varphi + \frac{\delta i}{C} \frac{F(V)}{\cos \varphi} \right]$$

si dimostra in modo simile, e si presta ad analoghe applicazioni.

Per trovare le altre formole di correzione, a cui abbiamo accennato alla fine del § 2, si noti che dalla (10) si può dedurre  $\frac{\partial X}{\partial V}$ , quando si conosca  $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ : cioè si può dedurre da una tavola a carica fissa (a velocità iniziale  $V$  fissa) l'effetto  $\frac{\partial X}{\partial V} dV$  dovuto ad un cambiamento di carica.

Così, derivando la (10), si ottengono due equazioni tra le  $\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}, \frac{\partial^2 X}{\partial V \partial \varphi}, \frac{\partial^2 X}{\partial V^2}$ . Cosicchè, se p. es. è data una tavola di tiro a carica fissa, e sono pertanto calcolabili  $\frac{\partial X}{\partial \varphi}, \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}$ , si può dedurre l'effetto  $\frac{\partial X}{\partial V} dV + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial V^2} dV^2$  prodotto sulla gittata da un cambiamento di  $V$ , cioè da un cambiamento della carica, anche tenendo conto degli infinitesimi del secondo ordine. E ciò con grande semplicità, senza complicare il metodo della falsa origine con parabole od altro. Gli esempi si potrebbero variare a piacere. Ma p. es. non credo valga la pena di dare formole di correzione, che tengano conto degli infinitesimi di ordine superiore al secondo.

**Matematica.** — *Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni.* Nota del Socio GIAN ANTONIO MAGGI.

**Chimica-fisica.** — *Sui cristalli misti.* Nota del Socio CARLO VIOLA.

Le precedenti Note saranno pubblicate in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie.* Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio ENRICO D'OIDIO.

1. Secondo il Borel, una serie

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

è sommabile quando la serie di potenze associata

$$(2) \quad u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$$

è una trascendente intera e l'integrale improprio (*associato*)

$$(3) \quad s = \int_0^{+\infty} e^{-x} u(x) dx$$

è convergente. È poi assolutamente sommabile quando sono convergenti assolutamente tutti gli infiniti integrali impropri

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} u^{(r)}(x) dx \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

ove

$$u^{(0)}(x) = u(x), \quad u^{(r)}(x) = \frac{d^r u}{dx^r} \quad (r = 1, 2, \dots).$$

In ogni caso il numero  $s$  è la somma della serie.

2. Per tutte le serie sommabili sussistono quelle proprietà algoritmiche elementari delle serie assolutamente convergenti che possono sintetizzarsi nelle seguenti uguaglianze:

$$(I) \quad (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + k = \\ = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \dots,$$

$$(II) \quad (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) k = k u_0 + k u_1 + k u_2 + \dots,$$

$$(III) \quad (u_0 + u_1 + u_2 + \dots) + (v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = \\ = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots$$

Al contrario, non sussistono le altre

$$(IV) \quad (u_0 + u_1 + \dots) (v_0 + v_1 + \dots) = \\ = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots,$$

$$(V) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots = u_0 + u_1 + \dots + u_{r-1} + (u_r + u_{r+1} + \dots).$$

Ciò indusse il Borel a limitare le sue considerazioni alle serie assolutamente sommabili, per le quali dimostrò esser valide anche queste proprietà.

Ora, in una recente Nota <sup>(1)</sup>, io ho dimostrato che, volendo restringere il campo delle serie sommabili fino a conseguire la validità dell'importante proprietà (IV), non è punto necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili (le quali formano una classe particolarissima di serie sommabili), ma basta fermarsi alle serie sommabili B', caratterizzate dalla convergenza semplice di tutti gli integrali (4) soltanto <sup>(2)</sup>.

3. In questa Nota voglio dimostrare che neppure per conseguire la validità della proprietà (V) è necessario spingersi fino alle serie assolutamente sommabili; ma che è sufficiente (ed anche necessario) fermarsi alle serie, che chiamerò *totalmente sommabili*, caratterizzate dalla convergenza semplice di tutti gli integrali (4).

Se si osserva che la serie di potenze associata alla serie

$$(8) \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots$$

<sup>(1)</sup> Nuova trattazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino vol. LII, 1916-1917, pag. 67).

<sup>(2)</sup> Precisamente ho dimostrato (loc. cit., n. 11) che: se delle due serie sommabili

$$(5) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

con somma  $u, v$  rispettivamente, una è sommabile B', la serie

$$(6) \quad w_0 + w_1 + w_2 + \dots, \quad \text{ove } w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0,$$

è sommabile ed ha per somma  $w = uv$ . Che se poi ambedue le serie (5) sono sommabili B', anche la (6) è sommabile B'.

Ancora: se le due serie (5) sono sommabili, la serie

$$0 + w_0 + w_1 + w_2 + \dots$$

è sommabile ed ha per somma  $uv$ .

è

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_{r+n} \frac{x^n}{n!} = u^{(r)}(x),$$

e che perciò l'integrale (4) ne è l'integrale associato, possiamo anche dire che una serie (1) è totalmente sommabile quando è sommabile insieme con la serie (8), per ogni intero  $r > 0$ .

*La condizione necessaria e sufficiente affinché per una serie sommabile (1) sussista la proprietà (V) per ogni intero  $r > 0$ , è che essa sia totalmente sommabile.*

Supponiamo infatti che la (1) sia sommabile con somma  $s$ . Affinché la (V) possa sussistere per ogni  $r > 0$ , è necessario che sia sommabile la serie (8) che comparisce nel secondo membro, per ogni  $r > 0$ , e perciò che la (1) sia totalmente sommabile.

Viceversa, se la (1) è totalmente sommabile con somma  $s$ , è pure sommabile la (8) per ogni  $r > 0$  ed ha per somma il valore  $\sigma_r$  dell'integrale (4). Si ha inoltre

$$s - \sigma_r = \int_0^{+\infty} e^{-x} [u(x) - u^{(r)}(x)] dx = \\ = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left[ u_0 + u_1 \frac{x}{1!} + \cdots + u_{r-1} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \right] dx = u_0 + u_1 + \cdots + u_{r-1} \quad (1)$$

e perciò la (V) sussiste.

4. Or vogliamo provare che con l'acquisto della proprietà (V), nessuna delle rimanenti proprietà viene perduta; sicchè tutto l'algoritmo delle serie assolutamente sommabili sussiste per la serie totalmente sommabili. Precisamente:

**TEOREMA I.** — *Se una delle due serie*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + (u_n + k) + u_{n+1} + \cdots$$

*è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (I).*

**TEOREMA II.** — *Se una delle due serie*

$$(10) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad ku_0 + ku_1 + ku_2 + \cdots \quad (k \neq 0)$$

*è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (II).*

(1) Si ricordi che, per  $n$  intero non negativo, è

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

TEOREMA III. — *Se le due serie*

$$(11) \quad \cdots u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

*sono totalmente sommabili ed hanno per somma  $u, v$  rispettivamente, anche la serie*

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots$$

*è totalmente sommabile ed ha per somma  $u + v$ .*

TEOREMA IV. — *E, nelle stesse ipotesi, anche la serie*

$$(12) \quad w_0 + w_1 + w_2 + \cdots \quad \text{ove } w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0$$

*è totalmente sommabile ed ha per somma  $uv$ .*

TEOREMA V. — *Se una delle due serie*

$$(13) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots, \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots$$

*è totalmente sommabile, tale è anche l'altra, e fra le loro somme passa la relazione (V).*

Le dimostrazioni dei teoremi I, II, III sono ben facili.

Passando al teorema V, osserviamo che, nella seconda parte della dimostrazione del teorema del n. 2, è stato provato che: se la prima delle due serie (13) è totalmente sommabile, tale è anche la seconda.

Viceversa: se per un certo intero fissato  $r > 0$ , la seconda delle (13) è totalmente sommabile, convergerà l'integrale (4) per detto valore di  $r$  e per tutti i maggiori, e quindi <sup>(1)</sup> anche per tutti i minori, e perciò anche la prima delle (13) sarà totalmente sommabile. Intine al n. 2 si è dimostrato che fra le somme delle due serie intercede la relazione espressa dalla (V).

Passiamo infine al teorema IV.

Le due serie (11), essendo per ipotesi totalmente sommabili, sono anche sommabili  $B'$ ; quindi, per il teorema enunciato nella seconda nota al n. 2, possiamo asserire che la serie (12) è sommabile (anzi è sommabile  $B'$ ) e che ha per somma  $uv$ . Dunque intanto: la serie prodotto (di Cauchy) di due serie totalmente sommabili con somma  $u, v$  rispettivamente è sommabile ed ha per somma  $uv$ .

Per dimostrare che la (12) è anche totalmente sommabile, basta dimostrare che è sommabile per ogni  $r$  la serie

$$(14) \quad w_r + w_{r+1} + w_{r+2} + \cdots$$

<sup>(1)</sup> Loc. cit., n. 6, lemma II (di Hardy).

Ed infatti, poichè la prima delle (11) è totalmente sommabile, tale sarà pure (pel teorema V) la serie

$$(15) \quad u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \dots$$

Poichè la (15) e la seconda delle (11) sono totalmente sommabili, possiamo asserire (per quanto abbiamo rilevato più su) che la serie-prodotto a cui danno origine

$$u_r v_0 + (u_r v_1 + u_{r+1} v_0) + (u_r v_2 + u_{r+1} v_1 + u_{r+2} v_0) + \dots$$

ossia

$$(16) \quad [w_r - (u_{r-1} v_1 + u_{r-2} v_2 + \dots + u_0 v_r)] + \\ + [w_{r+1} - (u_{r-1} v_2 + u_{r-2} v_3 + \dots + u_0 v_{r+1})] + \dots$$

è sommabile.

Intanto, poichè la seconda delle (11) è totalmente sommabile, tali saranno pure (pel teoremi V e II successivamente applicati) le serie

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{r-1} v_1 + u_{r-1} v_2 + u_{r-1} v_3 + \dots \\ u_{r-2} v_2 + u_{r-2} v_3 + u_{r-2} v_4 + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ u_0 v_r + u_0 v_{r+1} + u_0 v_{r+2} + \dots \end{array} \right.$$

Sommando, termine a termine, le serie sommabili (16) e (17), si trova la (14), la quale perciò sarà sommabile.

5. I teoremi precedenti ci permettono di concludere che d'ora innanzi la considerazione delle serie assolutamente sommabile è inutile (almeno per la teoria delle serie numeriche), perchè in luogo di esse si possono considerare con vantaggio le serie totalmente sommabili; in quanto che costituiscono una classe di serie più ampia, pur godendo di tutte le proprietà algoritmiche delle prime.

Vi ha di più. Hardy <sup>(1)</sup> ha dimostrato che vi sono serie convergenti che sfuggono alla sommabilità assoluta, cioè che non sono assolutamente sommabili. Invece: ogni serie convergente con somma  $s$  è totalmente sommabile con uguale somma.

Infatti se una serie (1) è convergente con somma  $s$ , è anche sommabile con uguale somma <sup>(2)</sup>; ma è pur sommabile la serie (8) per ogni  $r > 0$ , perchè convergente, dunque la (1) è totalmente sommabile.

<sup>(1)</sup> Quarterly Journal of Mathematics, vol. 35, 1903, pag. 22.

<sup>(2)</sup> Ibidem.

6. Se poi ci assoggettiamo a rinunziare ad adoperare la proprietà (V), possiamo considerare con vantaggio molto maggiore le serie sommabili  $B'$ , che costituiscono una classe amplissima, appena leggermente più ristretta di quella formata da tutte le serie sommabili. Per le serie sommabili  $B'$  sussistono le proprietà (I), (II), (III) e la (IV) così modificata;

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = 0 + w_0 + w_1 + w_2 + \dots$$

Il rinunziare ad adoperare la proprietà (V) non apporta che svantaggi trascurabili.

Per tutto ciò cfr. la Nota citata.

**Fisica terrestre. — *La velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887.* Nota di G. AGAMENNONE e A. CAVASINO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.**

Farà maraviglia che dopo un trentennio si torni ancora a studiare questo terremoto, che ebbe allora sì triste celebrità e che, avvenuto pochi anni dopo la catastrofe di Casamicciola (1883), indusse ancor meglio il nostro Governo ad incoraggiare ufficialmente gli studi sismici. A suo tempo non mancarono numerose e pregiate pubblicazioni sul predetto terremoto, segnatamente le estese monografie dei professori Issel, Mercalli e Taramelli, ma in tutte venne appena sfiorato il problema della velocità di propagazione. Chi se ne occupò meno fugacemente fu il compianto Tacchini, allora direttore del R. Ufficio centrale di Meteorologia, il quale, nella seduta del 12 giugno 1887, presentò una breve Nota a questa stessa Accademia, e poi il sig. Offret con due Note inserite nei Comptes Rendus dell'Accademia di Francia. Ma i risultati cui pervennero questi due autori, furono quanto mai discordi tra loro, in quanto che al Tacchini risultava una velocità di propagazione sensibilmente costante e che si aggirava sui 2100 metri al secondo, mentre, secondo l'Offret, la medesima cresceva con la distanza in modo notevolissimo, e precisamente da 450 a ben 2070 metri!

Colpito da questa enorme discordanza, uno di noi (Agamennone) si propose di approfondire la questione, ed a tale scopo cominciò col raccogliere numerosissimi dati orari ed a discuterli uno per uno per trarne il maggior vantaggio possibile. È bensì vero che in quel tempo i dati orari erano ben lunghi dal raggiungere la precisione di quelli che si ottengono pei recenti terremoti, specialmente allora per la mancanza quasi assoluta di strumenti sismici; ma la quantità poteva in parte supplire alla qualità e si poteva ragionevolmente sperare in una tal quale compensazione tra i numerosi dati, ben discussi e raggruppati in varie categorie di precisione diversa. Ma, come

si può ben comprendere, l'impresa non era di piccola mole, e per di più l'Agamennone non vi poteva impiegare saltuariamente che pochi ritagli di tempo in mezzo ad altri lavori d'urgenza, soprattutto concernenti il servizio geodinamico che appunto fin dal 1887 egli era incaricato di organizzare sotto l'alta direzione dei Tacchini. Avvenne così che passassero molti anni senza che il lavoro intrapreso entrasse ancora nella fase risolutiva, sebbene tutto il materiale fosse stato già approntato, vagliato e ordinato. Nè maggior tempo vi poté impiegare da quando fu nominato direttore del R. Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, poichè nuovi obblighi ed altri lavori più pressanti o di attualità lo distolsero sempre dal riprendere con assiduità lo studio già cominciato sul terremoto ligure del 1887; sicchè disperando di poterlo condurre a buon fine con le sole sue forze, si decise finalmente a ricorrere alla cooperazione del proprio assistente dott. A. Cavasino, il quale accettò ben volentieri l'invito e si pose anche lui alacramente all'opera, specie nei lunghi caleoli de' minimi quadrati. Con la speranza che il nostro lavoro completo e piuttosto voluminoso possa essere a suo tempo pubblicato negli Annali del R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, crediamo utile fin da ora di far conoscere i principali risultati da noi ottenuti, la cui importanza consiste soprattutto nell'aver dimostrato non rispondente a verità il fatto singolarissimo trovato dall'Offret, che la velocità andasse notevolmente crescendo con la distanza, e riportato in seguito da tanti altri autori e perfino in trattati di sismologia!

Da una disamina accurata di tutti i dati orari, ci è risultato chiaramente che questo preso aumento della velocità delle onde sismiche veniva fuori pel fatto che l'Offret assumeva, quale punto di partenza ne' suoi calcoli, l'ora di Mentone, da lui ritenuta la più sicura per l'epicentro e perchè era la più bassa di quelle osservate in tante altre località della *zona mesosismica*. Il sistema di riferirsi unicamente ad un solo dato orario, per la regione epicentrale, è assai pericoloso nel calcolo della velocità, quando non siasi assolutamente sicuri della sua precisione. Così, nel terremoto Andaluso del 1884, il Cancani avendo voluto basarsi sulla sola ora di Cadice, ebbe a trovare una velocità notevolmente decrescente col crescere della distanza, e cioè tutto all'opposto di quanto risultò all'Offret pel terremoto ligure<sup>(1)</sup>. Per non incorrere dunque in questo grave pericolo, è stato da noi prescelto il metodo adottato da Dutte e Newcomb pel terremoto di Charleston del 1886, e seguito quasi sempre dall'Agamennone nei suoi numerosi calcoli sulla velocità delle onde sismiche. Con questo metodo non si dà la preferenza ad alcuna delle ore osservate, sia pure riferentisi a località le più prossime all'epicentro, e vengono perciò di molto attenuate le conseguenze di qualche

<sup>(1)</sup> Vedi: G. Agamennone, *Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto Andaluso del 25 dicembre 1884* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 18 novembre 1894).

errore contenuto nelle medesime. In questo modo, tutte le ore possedute entrano ugualmente nel calcolo e tanto meglio se con vario peso, a seconda della loro maggiore o minore presunta esattezza.

\* \*

Ricordiamo che la mattina del 23 febbraio, preceduta nella notte da alcune poche scosse premonitorie, la commozione più disastrosa avvenne nella Riviera Ligure di ponente intorno alle 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> (t. m. di Roma). Per la medesima è stato possibile conoscere circa 700 dati orari, osservati direttamente da persone o indicati da strumenti (orologi arrestati, sismoscopî, o strumenti magnetici) in Italia, Francia, Svizzera, Austria, Germania, Belgio, Olanda, Inghilterra e Portogallo. In seguito ad una discussione accurata, s'è dovuto scartare la maggior parte de' medesimi, restandone 125, caratterizzati da errori probabili non superiori ad un paio di minuti, e precisamente divisi nei seguenti quattro gruppi:

N. 16	con errore probabile < 15	secondi
N. 21	" " " da 15 a 30	"
N. 29	" " " " 30 a 60	"
N. 59	" " " " 60 a 120	"

TOTALE N. 125

L'epicentro, da noi prescelto, è quello determinato dal Mercalli e che si trova a circa 20 km. a sud di P. Maurizio.

Formate 6 equazioni di condizione, dalla loro risoluzione col metodo de' minimi quadrati, vien fuori una velocità media superficiale di 2033 metri al secondo e l'ora epicentrale: 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> 12<sup>s</sup>.

Rifacendo il calcolo, utilizzando soli 40 dati orari, scartando cioè tutti quelli che non si riferiscono esplicitamente all'inizio della commozione sismica la quale, come si sa, fu di lunga durata, s'ottiene una velocità di m. 2137 e 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> 9<sup>s</sup> per l'ora all'epicentro.

Scartando ancora altri 10 dati orari, utilizzando cioè nel nuovo calcolo i 30 dati più sicuri relativi al principio della scossa, abbiamo m. 2335 per la velocità e 6<sup>h</sup> 20<sup>m</sup> 57<sup>s</sup> per l'ora epicentrale; e s'ottengono valori pochissimo diversi, ripetendo lo stesso calcolo, salvo ad arrecare lievi modificazioni ad alcuni pochi tra i predetti 30 dati orari.

Finalmente, scartando anche le ore di Nizza e Torino, come quelle che da molti indizi risultano troppo in anticipo e perciò assai anormali — a malgrado del lieve errore probabile che *a priori* era stato loro assegnato — risulta da un quinto calcolo, fondato sui rimanenti 28 dati, una velocità di 2540 m. ed un'ora epicentrale uguale a 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> 9<sup>s</sup>.

Come si vede, si ha da fare sempre con una velocità superiore ai 2000 metri e con un'ora epicentrale che si aggira attorno a 6<sup>h</sup> 21<sup>m</sup> e che perciò è più alta di ben 2<sup>1/2</sup> minuti circa in confronto di quella di Mentone (6<sup>h</sup> 18<sup>m</sup> 35<sup>s</sup>) assunta quale punto di partenza dall'Offret, e in ritardo di più di un minuto in confronto di quella di Nizza (6<sup>h</sup> 19<sup>m</sup> 43<sup>s</sup>), assunta come ora epicentrale da altri autori. Oltre ciò i vari valori da noi ottenuti per la velocità, e segnatamente l'ultimo, non accennano che la medesima abbia potuto sensibilmente variare, per il fatto che le differenze tra le ore osservate e calcolate non sono tali, e per segno e per grandezza, da fare intravvedere, coll'aumentare della distanza, un accrescimento e tanto meno così forte come l'Offret ed altri hanno preso (1).

Molti autori, tra i quali lo stesso Offret, avendo asserito che la velocità aveva variato notevolmente anche secondo le varie direzioni, abbiamo voluto intraprendere apposita ricerca eziandio su tale interessantissima questione: ed avendo diviso tutti i 125 dati, da noi posseduti, in tre gruppi relativi a tre diversi quadranti, siamo giunti ad un risultato opposto, cioè non esservi alcun serio motivo — anche avuto riguardo al ristretto numero ed alla poca esattezza dei dati orari, di cui si poteva disporre per un problema tanto più delicato — per ammettere la presa variazione, almeno nella misura così rilevante che gli altri autori avevano trovata.

Abbiamo altresì voluto fare un tentativo di calcolo per la velocità delle due fortissime repliche avvenute nella stessa regione Ligure la mattina del 23 febbraio, e cioè una dopo circa 10 minuti e l'altra dopo 2<sup>1/2</sup>, dalla grande scossa, sebbene per ognuna delle medesime non potessimo disporre che d'una quindicina di dati erari, vagliati e discussi in mezzo a tanti altri. Per la 1<sup>a</sup> replica è venuta fuori una velocità di c. 1600 metri, e per la 2<sup>a</sup> di soli c. 1300 metri: valori entrambi notevolmente minori, soprattutto l'ultimo, in confronto di quelli trovati per la grande scossa. Ri-eniamo che la differenza possa essere dipesa in parte, sebbene forse assai piccola, da una reale minore velocità delle onde sismiche prodotte dalle due repliche, a causa appunto della loro minore intensità, e per l'altra parte dal fatto che questa minore intensità s'oppose a che le onde sismiche si propagassero a distanze notevoli, e che nelle località più lontane fosse osservata soltanto una fase già assai inoltrata del movimento sismico, se non addirittura la massima.

Ritornando al più elevato valore (m. 2540) da noi trovato per la velocità di propagazione della grande scossa, è assai probabile che il medesimo si riferisca non alle onde *longitudinali*, bensì a quelle *trasversali* della

<sup>1)</sup> L'Agamennone aveva sempre ritenuto che così dovesse essere, ma soltanto per semplice intuizione e sospettando che l'ora di Mentone, utilizzata dall'Offret, potesse essere errata in meno, come aveva pubblicato fin dal 1894 nella Nota, sopra ricordata, sul terremoto Andaluso ed in altri suoi lavori.

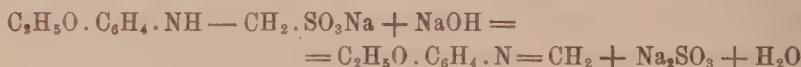
teoria dell'elasticità de' corpi solidi, le quali ultime avrebbero con il loro arrivo (e forse già a fase inoltrata) determinato l'inizio dello scuotimento sensibile nei vari luoghi oltre i 200 km. dall'epicentro e avrebbero provocato l'arresto degli orologi, o lo scatto dei sismoscopî o la perturbazione meccanica dei magnetografi fino alle distanze più notevoli. Con questa riserva, non si esclude che anche nel terremoto ligure del 1887 la velocità delle onde sismiche più rapide possa essere stata assai più considerevole e paragonabile a quella che è stata dedotta nei successivi terremoti meglio studiati, specialmente con l'aiuto di più appropriati e sensibili strumenti.

Nel corso di questa nostra ricerca non abbiamo mancato di studiare questo memorando terremoto ligure anche sotto altri punti di vista, ai quali occasionalmente o indirettamente siamo stati condotti. Così, per bene individuare la grande scossa e le due sue più notevoli repliche, abbiamo ripor tato un elenco accurato e il più completo possibile delle scosse sentite in Italia e nelle regioni limitrofe tanto il 22 quanto il 23 febbraio: elenco che può tornare utilissimo per chi volesse esaminare il modo di esplicarsi d'un gran terremoto. Oltraccidò, abbiamo fatto uno studio speciale circa l'estensione della grande scossa e delle sue due repliche più violente, e circa l'intensità relativa delle medesime, nell'ipotesi d'un comune *ipocentro*. Dalle nostre ricerche è risultato che la grande scossa fu circa due volte e mezzo più intensa della 1<sup>a</sup> replica, avvenuta dopo 10 minuti, e approssimativamente quattro volte più intensa della 2<sup>a</sup> replica, che seguì circa 2<sup>h</sup> 1/2 più tardi. L'estensione della grande scossa, avuto riguardo alla massima distanza di 1540 km. (Lisbona) a cui furono perturbati i magnetografi, fu di 7 1/2 milioni di chilometri quadrati la quale, per quanto voglia parere notevole, non rappresenta che circa la 68<sup>a</sup> parte dell'intera superficie del nostro globo<sup>(1)</sup>. Non mancano, inoltre, nel nostro lavoro, molte notizie inedite che l'Agamennone si procurò ne' primi anni di assidua inchiesta epistolare presso numerosi Osservatori, principalmente per indagare sulla precisione dei dati orari: e infine abbiamo corredato il nostro lavoro d'una ricca bibliografia riultante di più che 170 pubblicazioni sul nostro terremoto, il quale ora, mercè il nostro contributo, resterebbe così quasi completamente illustrato sotto i suoi molteplici aspetti, come del resto, la sua veramente straordinaria importanza richiedeva.

(1) Però, se a quel tempo avessero potuto ovunque agire i moderni sismografi, nessun dubbio che il nostro terremoto sarebbe stato uno di quelli ch' si dicono *mondiali*, vale a dire che arrivano a perturbare più o meno sensibilmente gli apparati sismici di tutte le parti della terra.

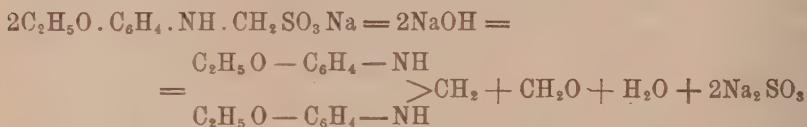
Chimica. — *Azione degli alcali e degli acidi sul p.etossifenilamidometansolfonato sodico.* Nota II del dott. ROBERTO LEPETIT, presentata dal Socio A. ANGELI.

La presente Nota, in dipendenza dalla precedente, ha origine da un tentativo di preparazione dell'anidroformofenetidina, ancora sconosciuta, partendo dalla supposizione che la soda caustica potesse agire sulla nevralteina nel senso dell'equazione.



dato che partendo dalla p.fenetidina il Bischoff ottenne con formaldeide solo la metilene di parafenetidina, mentre da altre amine si ottiene, in analoghe condizioni, l'anidroformamina e talora un miscuglio di questa con la diimide.

Si è verificato invece che non solo si ottiene coll'etossifenilamidometansolfonato sodico unicamente la diimide secondo l'equazione



in modo quantitativo, ma che con altri aril amidometansolfonati la reazione ha luogo nel medesimo modo per cui il trattamento dei medesimi con soda caustica diluita costituisce un interessante metodo di facile preparazione generale delle imidi. Notisi che partendo da arilamidometansolfonati ben puri si ha di primo acchito una diimide pura, mentre per ricristallizzazione di queste sostanze piuttosto delicate, il punto di fusione dapprima esatto si abbassa per decomposizioni facili a verificarsi.

Citerò, a titolo di esempio, la preparazione della metilendiimide della para fenetidina: 53 gr. di nevralteina vengono discolti in 500 cc. d'acqua calda e la soluzione si lascia raffreddare a 30-35° C., si aggiunge una soluzione di 10 gr. di soda caustica in 50 cc. d'acqua e si osserva, dopo alcuni minuti, eventualmente riscaldando a 60-70° C., un intorbidamento del liquido e la separazione di goccioline oleose che si depongono. Si lavano alcune volte nell'imbuto separatore con acqua tiepida e si ottiene col raffreddamento una massa cristallina di più di 27 gr. della diimide (calcolato 28,6) fondua a 89° C. come la diimide preparata da Bischoff.

Trattando la diimide con anidride acetica si ottiene con un buon rendimento della fenacetina caratterizzata dal punto di fusione e dalle reazioni.

*Azione degli acidi sul p.etossifenilamidometansolfonato sodico.*

Come fu già detto, da una soluzione di p.etossifenilamidometansolfonato sodico si ottiene l'acido libero aggiungendo a freddo con precauzione dell'acido cloridrico diluito in leggero eccesso. Se invece si riscalda, i cristalli si disciolgono e si nota dopo qualche tempo, specialmente all'ebollizione, uno svolgimento di anidride solforosa e poi di formaldeide, mentre il liquido acquista gradatamente un colore rosso più o meno intenso ed abbandona col raffreddamento una sostanza cristallina leggermente colorata in viola. Il liquido, che contiene cloridrato di fenetidina, ha un sapore amaro pronunciato e produce abbastanza rapidamente un senso di anestesia sulla lingua, che persiste durante mezz'ora e più. Raccogliendo il precipitato viola e purificandolo ottengo una sostanza che cristallizza dall'acqua bollente in aghi bianchi lucenti leggermente giallognoli e rappresenta il cloridrato di una base di proprietà anestetiche che fonde a 140° C. e non contiene più solfo.

Bollendo l'acido libero per se stesso con acqua si svolgono  $\text{SO}_2$  e  $\text{HCOH}$ ; il liquido rimane poco colorato in giallo e col raffreddamento si separano sostanze resinose ed una sostanza cristallina in aghi bianchi o leggermente paglierini contenente ancora zolfo.

Tale sostanza ricristallizzata dall'alcool bollente si ottiene in aghetti bianchi che fondono a 160-161° C. insolubili in benzolo e benzina, poco in etere acetico e pochissimo in acqua bollente (<sup>1</sup>). Anche questa sostanza ha un'azione anestetica pronunciata e abbastanza duratura.

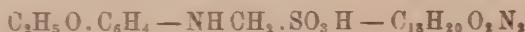
L'analisi diede: Sostanza gr. 0,4277,  $\text{BaSO}_4$  gr. 0,1920; sostanza gr. 0,5106,  $\text{BaSO}_4$  gr. 0,2336; sostanza gr. 0,1776, 13 cc. N. a 20° C. e 752 mm. =

Sostanza gr. 0,2010, 14,3 cc. N a 20° C. e 752 mm. Sost. 0,1949 0,4368  
 $\text{CO}_2$  e gr. 0,1114  $\text{H}_2\text{O}$ .

	S	N	C	H
Trovato . . . . .	6,16 %	8,32 %	61,12 %	6,39 %
" . . . . .	6,28 %	8,14 %	—	—
Calcolato per $\text{C}_{27}\text{H}_{33}\text{O}_6\text{N}_3\text{S}$ . . .	6,30 %	7,97 %	61,44 %	6,30 %

(<sup>1</sup>) = Ricorderò qui il brevetto germanico D R P 148.760 della Ditta Geigy per la preparazione di acidi monometildiamidoarilmethylsolfonici mediante il trattamento a caldo di basi aromatiche a posizione para libera con acido solforoso e formaldeide per cui si ottengono sostanze del tipo  $\text{NH}_2\text{RCH}_2\text{R.NHCH}_2\text{SO}_3\text{H}$  da due molecole di una sostanza  $\text{RNHCH}_2\text{SO}_3\text{H}$ . Nel caso del derivato metansolfonico della fenetidina dove la posizione dell' $\text{NH}_2$  è occupata dall'etossile, la trasposizione con formazione di un derivato del difenilmetano non può aver luogo nel senso del brevetto sovraccitato.

Con alcali si precipita una base fusibile a 140° identica con quella testè descritta. Questa sostanza venne pure ottenuta aggiungendo 1 mol. di acido etossiamido metansolfonico ad una soluzione alcoolica di 1 mol. della predetta base del P.F. 140° C. ciò che permette di stabilirne in modo certo la natura e di formularla così:



ossia quale para etossifenilamidometansolfonato della base del punto di fusione 140° C. per la quale dirò, anticipando, fu trovata la formola  $\text{C}_{18}\text{H}_{20}\text{O}_2\text{N}_2$ .

Lo studio della base di questo composto verrà pubblicato in altra Nota in collaborazione col dott. Maimeri che mi è grato di ringraziare per il suo valido aiuto in queste ricerche.

Zoologia. — *Sulla Crithidia inflata n. sp. parassita nel tubo digerente del Hygrotrechus najas. Struttura e ciclo di sviluppo.* Nota II di ANNA VIVANTI, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Nella Nota precedente ho dato la descrizione dei due primi stadi di sviluppo di una *Crithidia* vivente come parassita nel tubo alimentare del *Hygrotrechus najas*. Passo ora a considerare il terzo stadio, quello cioè di

#### *Post-flagellato.*

In quest'ultimo stadio (figg. 1-8) il parassita presenta la parte posteriore del corpo alquanto ridotta e globulare; l'anteriore tende anch'essa ad accorciarsi assieme al flagello, ed a concentrarsi verso il nucleo. Il nucleo, situato dapprima nel centro, occupa ora la parte basale, mentre il blefaroblasto, formato da un sottile bastoncino trasversale, gli si avvicina. Il flagello diviene ora sempre più corto e finisce con lo scomparire del tutto, mentre il parassita, concentrato attorno al nucleo, assume forma ovale od arrotondata e si ispessisce alla periferia, dando luogo alle cisti; queste uscendo dall'intestino con le feci, serviranno per l'infezione di nuovi individui.

Le cisti hanno sempre la parete esterna colorata intensamente e mancano di flagello; alcune (figg. 9, 10) presentano nucleo e blefaroblasto, in altre il nucleo è ridotto ad un gruppo di pochi cromidi (fig. 11); ed in altre ancora non vi è traccia né di nucleo, né di blefaroblasto, ma nel protoplasma si osservano grossi cromidi che stanno forse a rappresentare un nucleo frammentato (fig. 13). Variano da  $3\mu$ - $6\mu$  circa.

Ho trovato cisti con un nucleo grossissimo (fig. 14) e ripieno di granuli di cromatina, che si prepara alla moltiplicazione. Esso mediante una prima

divisione dà luogo a due nuclei figli (fig. 15), che alla loro volta si scindono formandone quattro (figg. 16, 17). Tale forma darà presto origine a quattro giovani individui formati ciascuno da una porzione di protoplasma con nucleo (fig. 18).

Ho veduto spesso forme polinucleate, le quali seguendo il solito processo danno luogo a nuovi individui piriformi, individui molto piccoli che misurano da  $3\mu$ - $6\mu$  circa. Questi non rimangono liberi nel tubo digerente, ma si fissano con la loro estremità ad una particella alimentare, o ad un lembo dell'epitelio intestinale. Costituiscono così degli aggruppamenti di più *Crithidiae*, il numero delle quali può variare di molto (figg. 19-24) e che uscendo con le feci dal retto, isolate o no, serviranno per l'infezione di giovani larve.

#### DIVISIONE.

I miei studi sulla moltiplicazione sono basati tanto sulle osservazioni sui preparati, quanto su quelle a fresco. Nella *Crithidia* del *Hygrotrechus naja* la moltiplicazione avviene per divisione longitudinale, che si osserva in forme di qualsiasi dimensione, e mediante la formazione di rosette.

Il primo a dividersi è sempre il blefaroblasto, il quale è seguito dal flagello e poi dal nucleo; da ultimo si ha la scissione longitudinale del corpo del parassita.

#### *Pre-flagellato.*

In seguito alle ricerche fatte sugli strisci ho trovato solamente due forme di pre-flagellato in divisione longitudinale.

In una (fig. 25), i due blefaroblasti ed i flagelli sono completamente divisi, mentre il nucleo, dato dall'accumulo di molti cromidi, soltanto ora si prepara alla formazione dei due nuclei figli. Nell'altra (fig. 26) invece, si ha la completa formazione di due blefaroblasti, due flagelli e due nuclei, che dal centro sono migrati verso la periferia, e nel corpo è già evidente il solco che darà origine alle due nuove forme. La fig. 27 poi, mostra che talvolta mediante successive divisioni i pre-flagellati possono dar luogo ad una rosetta di più individui.

#### *Flagellato.*

Ho potuto raccogliere molte figure di divisione longitudinale della *Crithidia* nel suo secondo stadio di sviluppo, le quali mostrano chiaramente come avviene il processo.

I primi indizi di divisione si osservano sempre nel blefaroblasto, il quale si restringe nel centro dividendosi poi in due parti uguali; alla moltiplicazione del blefaroblasto segue immediatamente quella del flagello e da ultimo quella del nucleo (figg. 28-30). Questo, nelle forme in divisione, è costituito

da un ammasso di granuli di cromatina che o lo riempiono completamente (fig. 30), o si dispongono alla periferia lasciando uno spazio libero nel centro (fig. 28).

Il protoplasma è ricchissimo di cromidi di varia misura e colorati più o meno intensamente dal Giemsa. Subito dopo la formazione dei due nuclei figli nella estremità anteriore del corpo, appare un breve solco longitudinale che procede a poco a poco sino all'estremità posteriore (figg. 32-34). In questo momento abbiamo la formazione di due nuovi individui che si separano del tutto (figg. 35-37) e nuotano liberamente nel lume intestinale.

Il processo di scissione longitudinale avviene in individui di qualsiasi forma e dimensione (figg. 37-42); ciò conferma il polimorfismo della specie.

La divisione può essere simmetrica od asimmetrica; nel primo caso i due flagellati che risultano sono uguali (fig. 37), nel secondo hanno dimensioni differenti (fig. 34), e mentre la differenza in lunghezza tra i due individui è abbastanza notevole ( $10\mu$ - $20\mu$ ), quella in larghezza è solo di qualche  $\mu$ .

Ciò potrebbe far ammettere l'esistenza di una sessualità. Parecchi autori, infatti, fecero l'ipotesi che esistano individui sessuali femminili ed individui sessuali maschili, e basarono tale opinione sulla formazione di due figli non uguali, i quali presentino cioè dimensione differente o numero diverso di granulazioni nel protoplasma.

Nessuno sino ad oggi venne ad una conclusione sicura su tale argomento; per accertarsene sarebbe necessario poter osservare se in vita due flagellati si coniugano fra di loro. Nè io per ora posso asserire nulla in proposito riguardo alla *Crithidia* del *Hygrotrechus najas*, ad eccezione del fatto che molto spesso in seguito a divisione longitudinale si hanno due forme di grandezza ineguale.

#### OSSERVAZIONI A FRESCO.

Potei fare molte osservazioni a fresco mettendo i parassiti tolti da un intestino infetto di *Gerris* in soluzione fisiologica, dove le forme completamente sviluppate si mantengono in vita per 24 ore circa, mentre le forme di predagellato e quelle di post-flagellato, tenute in camera umida, vivono per alcune settimane e si moltiplicano in modo straordinario.

Come colorazione vitale ho tentato usare il bleu di metilene, che mi fu poco utile, perchè le *Crithidiae* appena colorate morivano quasi istantaneamente.

Le osservazioni fatte a fresco confermarono tutte quelle sugli strisci.

Studiando una notevole quantità di flagellati, tolti da un intestino di *Gerris* (sia ♂ che ♀) e messa in una goccia di soluzione fisiologica, constatai sempre la presenza di molte forme in ogni stadio di sviluppo con dimensione ed aspetto svariatissimo.

I pre-flagellati appaiono come corpi ovali od arrotondati con grosso nucleo, piccolo blefaroblasto e con protoplasma incolore, trasparente, cosparso di granuli che rifrangono fortemente la luce; presentano o no il flagello. Le forme più giovani, prive di flagello, hanno due movimenti, uno di traslazione, ed uno di rotazione attorno a sè stesse; sovente descrivono un circolo per tre o quattro volte di seguito. Negli stadi più avanzati, quando cioè posseggono il flagello, o procedono in avanti con questo, o si fissano coll'estremità anteriore a qualche elemento estraneo e volgono il corpo con grande rapidità alternativamente a destra ed a sinistra, continuando tale movimento per un lungo periodo di tempo.

I flagellati, nel secondo stadio, generalmente sono i più abbondanti e si presentano sotto i diversi tipi descritti, ma prevalgono sempre le *Crithidiae* lunghe, sottili e filiformi appartenenti al tipo A.

Il protoplasma è talvolta alveolare, sempre incolore e trasparente, ricchissimo di granuli di cromatina che rifrangono fortemente la luce, e che, pel giuoco della luce stessa, appaiono di una bellissima tinta verde smeraldo. I movimenti delle *Crithidiae* sono rapidissimi; esse procedono col flagello in avanti che vibra con enorme velocità volgendosi ora da un lato ed ora dall'altro, cosicchè l'animale non si avanza in linea retta, ma seguendo una linea a zig-zag. La *Crithidia*, dopo aver percorso un breve tratto, facendo perno sull'estremità posteriore, o descrive per parecchie volte un circolo completo e rimane nella medesima posizione, o descrive un angolo di 180° e cambia completamente direzione.

Tali flagellati si raggruppano spesso a centinaia radialmente ad una particella alimentare, alla quale aderiscono con loro flagello. Questi aggruppamenti sono bellissimi e si possono paragonare ad una attinia nella quale ogni tentacolo rappresenti un singolo individuo. Ciascun flagellato si muove indipendentemente, e l'intero aggruppamento non si sposta mai a meno che non venga urtato da un corpo estraneo, o trascinato altrove da una corrente di liquido.

Vidi in gran numero forme grandi e piccole in divisione e più di una volta riuscii a seguire il completo processo di scissione longitudinale, che avviene con gran lentezza procedendo dall'estremità distale a quella basale. I due individui che ne risultano mantengono sempre la precisa forma del genitore, pur non avendone le stesse dimensioni.

Nelle mie osservazioni a fresco mi è occorso di vedere molto spesso il processo dell'incistamento. Quando il post-flagellato ha assunto la forma di un corpo ovale ed è munito ancora di flagello, comincia a perdere alquanto della sua vivacità primitiva e generalmente ruota attorno a sè stesso non spostandosi di molto. Tale movimento diviene sempre più lento, mentre contemporaneamente il flagello si accorcia. A poco a poco la *Crithidia* contra tutto il protoplasma attorno al nucleo e si arrotonda perfettamente;

essa eseguisce ancora alcuni giri attorno a sè stessa e poi rimane completamente immobile. La *Crithidia* si è ora incistata, ma mostra ancora per alcuni istanti un brevissimo flagello, che presto scompare del tutto non lasciando alcuna traccia di sè.

#### MODO D'INFEZIONE.

Io credo che l'infezione sia casuale e non ereditaria, giacchè non trovai mai nè uova nè organi genitali infetti. I flagellati sotto forma di cisti, usciranno dunque con le feci dal retto e probabilmente verranno ingerite da giovani larve di *Gerris*.

#### CONSIDERAZIONI GENERALI.

La *Crithidia*, che ho descritta, è molto simile pei caratteri generali a quella studiata dalla signorina Porter (1909), che vive come parassita nel tubo alimentare, ovarî e feci del *Gerris paludum*.

La *Crithidia* del *Gerris paludum* passa per i tre stadi di pre flagellato, flagellato e post-flagellato, come quella del *Hygrotrechus najas*; mentre però questi due parassiti hanno caratteri analoghi nel primo e nel terzo stadio, essi presentano alcune differenze nel secondo, quando cioè hanno raggiunto il loro completo sviluppo.

La signorina Porter nota infatti:

1°) nella membrana ondulante la presenza di mionemi che servono a darle una certa contrattilità;

2°) nel protoplasma la presenza del cosiddetto « granulo basale » situato fra il blefaroblasto e l'origine del flagello, dal quale sembra che il flagello stesso abbia origine.

Nel caso della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* invece:

1°) non ho mai riscontrati mionemi nella membrana ondulante;

2°) per ciò che riguarda il granulo basale, posso dire, che spesso vi sono granulazioni vicino al blefaroblasto, ma che nessuna ha caratteri tali da essere ritenuta come un « granulo basale ».

Oltre a ciò il polimorfismo della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* è molto maggiore di quello della *Crithidia* del *Gerris paludum*. La signorina Porter nella sua descrizione non accenna alle forme che io ho chiamato del tipo *b*, e che sono numerosissime nel caso della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas*, a quelle forme cioè caratterizzate da speciali rigonfiamenti protoplasmatici situati o all'estremità basale, o tra l'estremità basale ed il nucleo, od in corrispondenza del nucleo stesso.

La *Crithidia* del *Gerris paludum* infetta tubo digerente, feci ed ovarì, quella del *Hygrotrechus najas* tubo digerente e feci soltanto.

Considerando dunque, che l'ospite in cui vivono le due *Crithidiae* è diverso, e che oltre a ciò esse presentano notevoli caratteri differenziali, io credo opportuno fare della *Crithidia* del *Hygrotrechus najas* una nuova specie che denominero *Crithidia inflata*.

### SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

I disegni sono fatti con la camera chiara usando l'obiettivo di 1/15 e l'oculare compensatore 8.

L'ingrandimento è di 1200 volte.

FIG. 1, 2. — Principio di incistamento; parte posteriore accorciata.

FIGG. 3-8. — Post-flagellati con parte posteriore ancora più accorciata; protoplasma concentrato attorno al nucleo; nucleo grosso arrotondato addossato alla periferia; blefaroblasto sempre più vicino al nucleo ed a guisa di bastoncino.

FIG. 8. — Post flagellato visto a frese.

FIGG. 9-14. — Una serie di cisti.

FIG. 9. — Cisti arrotondata con nucleo, blefaroblasto e con periplasma evidente (diametro  $4.74 \mu$ ).

FIG. 10. — Cisti arrotondata con nucleo, blefaroblasto e poche granulazioni.

FIG. 11. — Piccola cisti arrotondata con nucleo dato dall'ammasso di cromidi.

FIG. 12. — Cisti ovale ( $6.30 \mu \times 4.74 \mu$ ) con nucleo evidente, il blefaroblasto non si vede; granulazioni di varia dimensione; periplasma.

FIG. 13. — Grossa cisti con nucleo probabilmente frammentato ( $7.90 \mu \times 6.32 \mu$ ).

FIG. 14. — Grossa cisti ( $7.90 \mu \times 6.32 \mu$ ) con nucleo ( $4.74 \mu \times 3.16 \mu$ ), dato dall'accumulo di cromidi, che si prepara alla moltiplicazione; periplasta evidente.

FIG. 15. — Cisti il cui nucleo ha subito una prima divisione in due nuclei figli.

FIGG. 16, 17. — Seconda divisione in quattro nuclei figli.

FIG. 18. — Giovani forme.

FIGG. 19-24. — Aggruppamenti di più individui derivanti da forme polinucleate.

FIG. 25. — Pre-flagellato in divisione.

FIG. 26. — Pre-flagellato in divisione, ma in istadio più avanzato del precedente. Si ha già la formazione dei due nuclei, dei due blefaroblasti e dei due flagelli, ed un solco trasversale mostra nettamente le due forme figlie che ne risulteranno.

FIG. 27. — Moltiplicazione a rosetta di pre-flagellato.

FIGG. 28-43. — Forme in divisione longitudinale.

FIG. 28. — Forma in divisione, blefaroblasto e flagello già completamente scissi.

FIG. 29. — Flagellato che darà luogo a due forme figlie piccole.

FIG. 30. — Flagellato che darà luogo a due individui di dimensioni differenti, il più lungo misura  $59 \mu$  circa e l'altro  $43 \mu$  circa.

FIG. 31. — Forma in divisione con nucleo, blefaroblasto e flagello già completamente scissi; moltissime granulazioni protoplasmatiche.

FIG. 32. — Forma in divisione longitudinale; anteriormente il corpo del parassita è già diviso e sono già evidenti le due forme figlie con nucleo, blefaroblasto e flagello proprio; sono disuguali: una misura  $55.30 \mu$  e l'altro  $39.50 \mu$ .

FIG. 33. — Altra forma in divisione di aspetto differente dalla precedente.

FIG. 34. — Forma in divisione molto avanzata; le due figlie sono ancora unite all'estremità posteriore per un brevissimo tratto; nucleo arrotondato; blefaroblasto tondeggiante, flagello sottilissimo. Le due nuove forme sono disuguali: una misura  $36.34\ \mu$  in lunghezza e  $3\ \mu$  in larghezza; l'altra invece  $63.20\ \mu$  in lunghezza e  $2\ \mu$  circa in larghezza.

FIG. 35. — Due flagellati appena divisi, lunghi e sottili, uguali ( $60.04\ \mu$ ).

FIG. 36. — Due *Crithidia* appena divise; sono disuguali, una misura  $48\ \mu$  e l'altra  $37\ \mu$  circa in lunghezza; in larghezza misurano tutte e due  $3\ \mu$  circa.

FIG. 37. — Due *Crithidia* lunghissime ( $79.00\ \mu$ ) appena divise; nucleo allungato; blefaroblasto tondeggiante, abbondanti granulazioni specialmente in vicinanza del nucleo. All'estremità posteriore v'è un corpo arrotondato che ritengo sia una particella alimentare, alla quale sis ia attaccato il parassita prima di dividersi; ma il preparato non troppo evidente in questo punto non permette di determinarne la natura.

FIGG. 38-40. — Flagellati in divisione che daranno luogo a *Crithidia* di vario aspetto.

FIG. 41. — Due piccole *Crithidia* già completamente divise ( $19\ \mu$  circa).

FIG. 42. — Forma in divisione in istato molto avanzato.

FIG. 43. — *Crithidia* che si prepara alla moltiplicazione come si può vedere dal grosso nucleo ( $4\ \mu$  circa), dato dall'accumulo dei cromidi, che presenta un principio di movimento nucleare.

Fisiologia. — *Sull'adattamento degli anfibi all'ambiente liquido esterno mediante la regolazione della pressione osmotica dei loro liquidi interni. Proprietà chimiche e fisico-chimiche dei liquidi interni di animali tenuti in soluzioni Ringer isotoniche ed ipotoniche.* Nota V di BRUNO BRUNACCI, presentata dal Socio LUCIANI (¹).

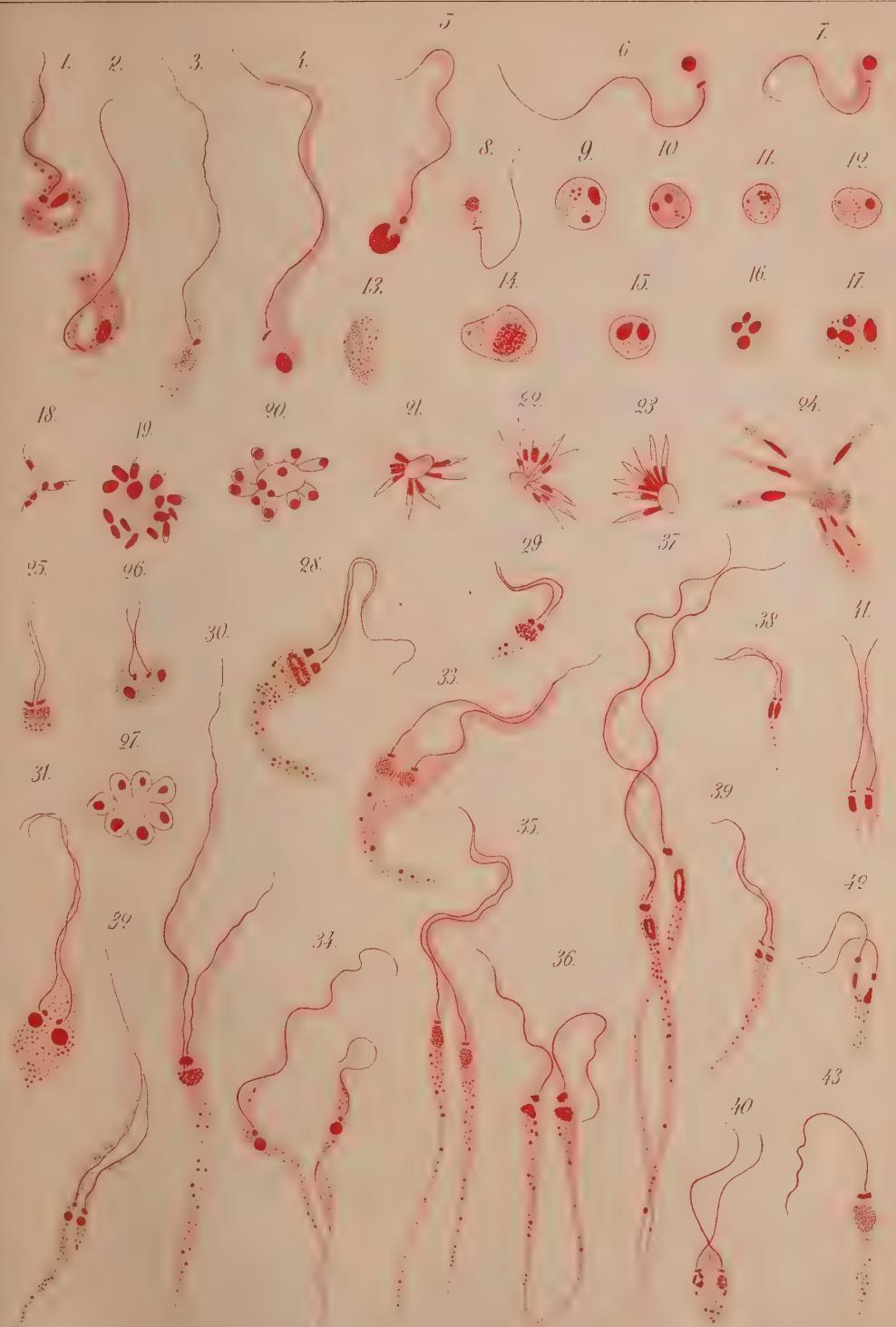
Dopo le esperienze riferite precedentemente ho eseguito anche ricerche per constatare i fenomeni osservabili nelle rane esculente estive immerse in soluzioni Ringer isotoniche ed in soluzioni Ringer ipotoniche. Come nel caso di animali tenuti nelle soluzioni ipertoniche, così in questi casi, le rane, prima di essere immerse nelle soluzioni saline iso- ed ipo-toniche, venivano fatte soggiornare in acqua corrente di condotta finchè nel liquido di lavaggio non si fossero più trovati residui alimentari.

La soluzione isotonica conteneva:

Na Cl . . . . .	gr. 7	%
Ca Cl <sub>2</sub> . . . . .	" 0,1	"
Na HCO <sub>3</sub> . . . . .	" "	"
KCl . . . . .	" 0,075	"

Il  $\Delta$  di tale soluzione era  $= 0^{\circ}450$ , R  $22^{\circ} = 26$  Ohm.

(¹) Annunciata il 25 febbraio 1915, non fu potuta più inviare perchè l'A. fu richiamato in servizio militare.





In questa soluzione furono messe le rane, il cui sangue defibrinato, il siero dello stesso, la linfa dei sacchi, e l'orina venivano poi analizzati dopo le prime ore di permanenza e dopo parecchi giorni.

Dopo le prime 24 h. non si notano cambiamenti nel colore della pelle degli animali, come avviene invece allorchè essi siano stati immersi nelle soluzioni saline ipertoniche. Non si trova urina in vescica: lo stomaco e gli intestini sono vuoti; la cistifellea è generalmente poco ripiena di bile; i polmoni sono poco distesi. Non si notano fenomeni dolorifici allorchè gli animali siano stimolati.

Dai risultati analitici riportati nella tabella 8<sup>a</sup>, serie F, si rileva che già dopo le prime 24 h. gli animali assumono elettroliti dall'ambiente salino isotonicico e che questo fatto fa aumentare la concentrazione molecolare del loro sangue, mentre il  $\Delta$  del liquido ambiente diminuisce. Nello stesso tempo si accumula la linfa nei loro sacchi linfatici.

Quando le rane sono rimaste parecchi giorni nell'ambiente salino isotonicico, il colore della loro pelle resta del pari immutato; non si trova urina raccolta in vescica, lo stomaco è vuoto, l'intestino contiene abbondante liquido verdastro, così pure si trova raccolto abbondante liquido verdastro molto denso nella cloaca, la cistifellea si presenta più ripiena di bile che negli animali che vi hanno soggiornato 24 h. soltanto.

Nei sacchi linfatici si trova raccolta una grande quantità di linfa spontaneamente coagulabile.

I polmoni sono mediocremente distesi; gli animali si mostrano normalmente vivaci, la loro sensibilità dolorifica non è aumentata, e stimolati adeguatamente non presentano mai il caratteristico riflesso tonico che si osserva sempre invece nelle rane immerse in soluzioni saline ipertoniche.

Dalle analisi dei liquidi interni riassunte nella stessa tabella 8<sup>a</sup> risulta che la concentrazione molecolare del sangue defibrinato non tende ad aumentare oltre il limite già raggiunto dopo le prime 24 h., mentre quella della linfa defibrinata dei sacchi tende leggermente a diminuire.

Osservando le variazioni cui va soggetto il liquido salino isotonicico mentre le rane vi soggiornano, si nota che ad una primitiva diminuzione della sua concentrazione molecolare tien dietro un aumento il quale nel 4<sup>o</sup> giorno raggiunge il valore originario, e nel 7<sup>o</sup> lo sorpassa ( $\Delta = 0^{\circ},465$ ).

Poichè a questo aumento del  $\Delta$  non coincide una diminuzione della resistenza elettrica, come dovrebbe accadere se esso fosse dovuto ad un aumento di elettroliti ceduti dall'animale all'ambiente, così dobbiamo ammettere che esso sia dovuto a sostanze non elettrolite osmoticamente attive prodotte dall'animale stesso e da lui eliminate (urea, bile, acidi grassi ecc.).

Relativamente alle rane esclente estive tenute in soluzione Ringer ipotonica, i risultati analitici sono riportati nella tabella 9<sup>a</sup>, serie G.

Il liquido ipotonico conteneva:

Na Cl . . . . .	gr.	2,5	%
Ca Cl <sub>2</sub> . . . . .		0,18	
Na HCO <sub>3</sub> . . . . .		—	
KCl . . . . .		0,13	

Il suo  $\Delta$  era = 0°215, R 22° = 55 Ohm.

Anche in questo caso cioè di animali immersi in soluzione salina ipotonica si vede che gli elettroliti passano nei primi giorni nell'interno dell'organismo che poi esso tende a ricedere.

Questo fatto risulta dall'analisi del liquido ambiente praticata ogni tanto. Il colore della pelle dei suddetti animali rimane immutata; così pure non presenta variazioni degne di nota la loro eccitabilità.

Quello che invece risalta maggiormente agli occhi dell'osservatore, è la grandissima quantità di linfa che sin dalle prime ore si accumula in tutti i sacchi linfatici. Tale quantità è molto superiore di quella che si vede accumularsi negli stessi sacchi quando le rane soggiornano in ambienti ipertonici ed isotonici<sup>(1)</sup>. La suddetta linfa ha un colore più intensamente giallo del solito e si *rapprende spontaneamente in una massa gelatinosa densa*. Il sangue si presenta molto acquoso; esso forma un piccolo coagulo rosso-chiaro, ed alla centrifugazione si ottiene circa un terzo meno di corpuscoli di tutte le altre volte, comprese quelle nelle quali le rane furono tenute in acqua distillata. Nella vescica si trova poca o punta urina, per lo più densa e di colorito verdastro. Il cuore è normale; lo stomaco vuoto, mentre l'intestino contiene nell'ultimo tratto e nella cloaca molta bile densa. La cistifellea è pure ripiena di bile.

Come si rileva dalle analisi riportate nella tabella 9<sup>a</sup>. serie G, confrontate con quelle della tabella 1<sup>a</sup> (Nota III) nelle quali sono riportati i dati riferentisi alle rane esculente estive tenute in acqua distillata, la concentrazione molecolare del sangue defibrinato e del siero dello stesso tende ad aumentare. Infatti da una media di circa  $\Delta = 0^{\circ},440$  (sangue defibrinato) e di  $\Delta = 0^{\circ},410$  (siero dello stesso) ottenuta dalle rane soggiornanti in acqua distillata, si sale in quelle tenute invece in ambiente ipotonico al valore di circa  $\Delta = 0^{\circ},460$ .

Un fatto che ci sembra degno di nota è che la linfa defibrinata che si produce in così enorme quantità, abbia un  $\Delta$  eguale a quello che ha il sangue defibrinato delle rane esculente estive tenute in acqua distillata.

(1) Quando per scopo didattico o per altro scopo si debba avere un'abbondante quantità di linfa è facile ottenerla così.

Serie F

TABELLA 8<sup>a</sup>

Rane esculente estive, tenute in soluzione Ringer isotonica  
(NaCl gr. 7‰; CaCl<sub>2</sub>, Na HCO<sub>3</sub> gr. 0,1‰; KCl gr. 0,075‰).

Numero e Data	A	R <sub>92°</sub> (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a 110° C gr. %	Ceneri gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni		Gelosia %	Liquido ambiente R <sub>92°</sub>
							gr.	gr.		
1. Dopo 24 ore	Liquido ambiente	0,420	26,5	—	—	—	Si mettono 24 rane in soluzione isotonica dopo depurazione in acqua di condotta e vi si lasciano 24 ore. Temperat. ambiente circa 12° C.		* 0,450	26
	Sangue defibrinato	0,520	35	—	—	—			0,420	26,5
	Siero dello stesso	0,505	27	0,471	2,840	0,284				
	Linfa defibrinata	0,515	26	0,336	2,216	0,316				
	Urina	—	—	—	—	—				
	* Appena messevi le rane.									
2. Dopo 7 giorni (21-VI -1913)	Liquido ambiente	0,465	26	—	—	—	Si mettono 30 rane in soluzione isotonica, previa depurazione in acqua di condotta (acqua piovana di cisterna) e vi si lasciano 7 giorni.		* 0,450	26
	Sangue defibrinato	0,520	34	—	—	—	Temperatura ambiente circa 12° C.		0,425	26,5
	Siero dello stesso	0,495	28	0,523	3,238	0,377			0,450	26
	Linfa defibrinata	0,505	27	0,271	1,784	0,266			0,465	
	Urina	—	—	—	—	—				
	* Appena messevi le rane.									

Serie G

TABELLA 9a.

Rane esuviente estive, tenute in soluzione Ringer ipotonica  
(NaCl gr. 2,5% + gli altri sali in proporzione).

Numero e data	$\Delta$	$R_{22^\circ}$ (in Ohm)	N. tot. gr. %	Residuo secco a $110^\circ C$ gr. %	Generi gr. %	Sostanze organiche gr. %	Osservazioni		$\Delta$	$R_{22^\circ}$
							—	—		
1. 9° giorno (3-12.VI-1912)	Liquido ambiente	0,220	60	—	—	—	Si mettono 24 rane in soluzione ipotonica, dopo depurazione in acqua di condotta e vi si lasciano 9 giorni. Temperatura ambiente circa $12^\circ C$ . Allo scuro,		* 0,215 0,210 0,200 0,210 0,220 0,215	
	Sangue defibrinato	0,460	39	—	—	—				
	Siero dello stesso	0,460	31	0,353	2,960	0,234				
	Linfia defibrinata	0,445	30	0,146	1,160	0,282				
	Urina	0,150	non basta!	0,203	—	—				
2. 11° giorno (8-19.IX-1913)	Liquido ambiente	0,215	55	—	—	—	Si mettono 40 rane in soluzione ipotonica, dopo depurazione in acqua di condotta e vi si lasciano 11 giorni. Allo scuro. Temperatura ambiente circa $12^\circ C$ .		* 0,215 0,210 0,200 0,210 0,220 0,215	
	Sangue defibrinato	0,465	38	—	—	—				
	Siero dello stesso	0,465	31	0,387	2,988	0,312				
	Linfia defibrinata	0,440	30	0,243	1,658	0,366				
	Urina	—	—	—	—	—				

\* Appena messevi le rane.

Riassumendo, tanto dalle esperienze eseguite sulle rane esculente estive immerse in soluzione Ringer isotoniche, quanto da quelle eseguite tenendo le rane nelle soluzioni Ringer ipotoniche, si rileva che gli animali assumono in primo tempo elettroliti dall'ambiente e che successivamente glieli ricedono, mantenendo poi la pressione osmotica del loro sangue a quel livello che era stato raggiunto nelle prime ore a spese degli elettroliti, mediante l'utilizzazione di sostanze osmoticamente attive non elettrolite che il loro organismo viene eliminando nell'ambiente, precisamente come si è visto avvenire nel caso di rane tenute in ambiente salino ipertonico.

Le esperienze poi relative alle rane tenute in soluzione Ringer isotonica confermano quanto avevamo osservato in tutte le ricerche precedenti fatte con le soluzioni ipertoniche e cioè che la pressione osmotica del sangue e della linfa tende sempre a portarsi ad un livello superiore a quello dell'ambiente.

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÖITI dà notizia delle condizioni di salute del senatore BLASERNA, da varî giorni gravemente ammalato; le notizie odierni accennano ad un miglioramento, che è sperabile voglia mantenersi. Dietro proposta del suo Presidente, la Classe approva unanime che all'illustre infermo siano inviati i più fervidi auguri di guarigione.

Il PRESIDENTE comunica alla Classe i ringraziamenti, per la loro recente elezione, del Socio ALBERTONI e dei Corrispondenti ANGELITTI, BORRIS, DE MARCHI e FUBINI.

Il PRESIDENTE dà il triste annuncio della morte dei seguenti Soci stranieri: CHAUVEAU AUGUSTO, mancato ai vivi il 4 gennaio scorso; apparteneva il defunto Socio all'Accademia, per l'*Agronomia* sino dal 13 febbraio 1890. — BASSOT LEONE, morto il 17 gennaio scorso; faceva parte dell'Accademia per la *Geografia matematica e fisica* sino dal 27 luglio 1913.

#### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci TARAMELLI e LACROIX, e del Corrisp. BERLESE. Fa inoltre particolare menzione di una *Nota Commemorativa di Pietro Duhem*, del prof. A. FAVARO; della Memoria dei signori VOLTA e SILVA, intitolata: *Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione dei pen-*

doli gravimetrici; e delle *Tavole inedite di Mammiferi terziari e di Vertebrati del Permiano*, preparate da E. DRINKER CAPE e W. DILLER MATTHEW.

Il Corrisp. FANTOLI offre in omaggio all'Accademia varie sue pubblicazioni.

#### CONCORSI A PREMI

La Classe approva, su proposta del Consiglio d'Amministrazione, che il concorso al premio *Carpi* pel biennio 1917-918, venga bandito per lavori di *Fisica terrestre* intesa nel senso più lato; ed inoltre che si rimetta a concorso pel 1917 il tema del concorso andato deserto colla scadenza del 1916, tema che riguarda la *Meccanica dello sviluppo degli organismi*.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACADEMIA  
*presentate nella seduta del 4 febbraio 1917.*

BERLESE A. — Centuria terza di Acari nuovi (Estr. dal « Redia », vol. XII, pp. 289-338). Firenze, 1916. 8°.

FANTOLI G. — Concorso al premio di fondazione Kramer (Estr. dai « Rendiconti del reale Istituto Lombardo di scienze e lettere », vol. XLVII, pp. 1149-1152). Pavia, 1915. 8°.

FANTOLI G. — Premiazione degli allievi delle scuole professionali. Milano, 1916. 8°. pp. 1-10.

FANTOLI G. — Relazione sul concorso al premio della fondazione Kramer (Estr. dai « Rendiconti del reale Istituto Lombardo di scienze e lettere », vol. XLIX, pp. 1097-1100). Milano, 1917. 8°.

FANTOLI G. — Sistemazione ed ampliamento del porto di Venezia (Studi e proposte della commissione tecnica). Roma, 1915. 6°. pp. 1-75.

FAVARO A. — Pietro Duhem; nota commemorativa letta al R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, adunanza del 29 ottobre 1916. Venezia, 1916. 8°. pp. 1-5.

LACROIX A. — Notice historique sur Bory de Saint-Vincent (Institut de France, Académie des sciences). Paris, 1916. 4°. pp. 1-75.

MATTEW W. D. — Hitherto unpublished plates of tertiary mammalia and permanent vertebrata. Descriptions of plates. Washington, 1915. 4°, pp. I-CLIV.

PETRONE A. — Contributo alle questioni medico-legali nei morti per soffocazione senza alcuna lesione esterna (Estr. dagli « Atti dell'Accad. Gioenia di scienze naturali », vol. V, pp. 1-6). Catania, 1912. 4°.

PETRONE A. — Contributo allo studio dell'encefalite traumatica, sub-acuta dell'uomo (Estr. dal « Bollettino dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », fasc. XXII, pp. 1-7). Catania, 1912. 8°.

PETRONE A. — La reazione al sesquiosido di cromo secco, anche nei nucleoli delle cellule nervose e nei nuclei di cellule parenchimali (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », vol. VIII, pp. 1-3). Catania, 1914. 4°.

PETRONE A. — L'apparato reticolare endoglabulare di tutte le emasie (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », vol. VII, pp. 1-7). Catania, 1914. 4°.

PETRONE A. — La nuova reazione del sangue per la fissazione del sesquiosido di cromo secco (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali », vol. VIII, pp. 1-6). Catania, 1914. 4°.

SILVA G. — Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione di pendoli gravimetrici. Bologna, 1916. 4°, pp. 1-36.

TARAMELLI E. — Di alcuni problemi geologici che riguardano la valle dell'Isonzo (Estr. dai « Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. XLIX, pp. 966-985). Milano, 1917. 8°.

VOLTA L. — Sulla riduzione al vuoto delle durate di oscillazione di pendoli gravimetrici. Bologna, 1916. 4°, pp. 1-36.

